MINISTERUL EDUCAȚIEI CERCETĂRII ȘI TINERETULUI

Simona Bratu
Adrian Motomancea
Ion Apostol

Fizică

Manual pentru clasa a XI-a

F1

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, R.A.

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI

Simona Bratu
Adrian Motomancea
Ion Apostol

Fizică

Manual pentru clasa a XI - a

F1

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, R.A.

Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului Educației și Cercetării nr. 4742 din 21.07.2006, în urma evaluării calitative organizate de către Consiliul Național pentru Evaluarea și Difuzarea manualelor și este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordinul ministrului Educației și Cercetării nr. 3252/13.02.2006.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
BRATU, SIMONA
Fizică: F1: manual pentru clasa a XI-a / Simona Bratu, Adrian Motomancea, Ion Apostol. – București: Editura Didactică și Pedagogică, 2007
ISBN 978-973-30-1883-4

I. Motomancea, Adrian
II. Apostol, Ion

51(075.35)

© **EDP 2007.** Toate drepturile asupra acestei ediții sunt rezervate Editurii Didactice și Pedagogice R.A., București. Orice preluare, parțială sau integrală, a textului sau a materialului grafic din această lucrare se face numai cu acordul scris al editurii.

Contribuția autorilor:
Simona Bratu: cap. 1, cap. 2 (2.1–2.5), cap. 4
Adrian Motomancea: cap. 2 (2.6–2.8), cap. 5
Ion Apostol: cap. 3

Referenți:
Academician prof. dr. ing. **Radu P. VOINEA** – Universitatea Politehnica, București
Prof. univ. dr. **Marcel DOBRE** – Universitatea Politehnica, București

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, R.A.
Str. Spiru Haret nr. 12, sectorul 1, cod 010176, București
Tel.: (021) 315.38.20
Tel./fax: (021) 312.28.85
e-mail: office@edituradp.ro
www.edituradp.ro

Comenzile pentru această lucrare se primesc:
- prin poștă: pe adresa editurii
- prin e-mail: comenzi@edituradp.ro
  marketing@edituradp.ro
  comercial@edituradp.ro
- prin tel./fax: (021) 315.73.98; (021) 313.34.70

Redactor: prof. **Izabella Tilea**
Tehnoredactor: **Liviu Păcurar**
Desenator: **Aurica Georgescu**
Coperta: **Otilia Borș**

Număr de plan: 52129/2007. Format: 16/70 x 100
Bun de tipar: august 2007. Coli de tipar: 15,75

Tiparul executat la DON STAR, Galați

Capitolul 1

OSCILAȚII MECANICE

1.1. FENOMENE PERIODICE. PROCESE OSCILATORII ÎN NATURĂ ȘI ÎN TEHNICĂ

Un fenomen sau o mișcare se numește periodică dacă se repetă la intervale de timp egale. În natură întâlnim multe fenomene periodice, ca de exemplu: alternanța anotimpurilor, alternanța zi-noapte, fluxul și refluxul, bătăile inimii, mișcarea valurilor, tangajul și ruliul unei nave, vibrațiile lamelei de cuarț într-un ceas electronic, vibrațiile atomilor în solide în jurul pozițiilor de echilibru etc.

O categorie importantă de fenomene periodice o reprezintă oscilațiile. Acestea se caracterizează prin variația periodică în timp a mărimilor caracteristice și prin transformarea energiei, periodic, dintr-o formă în alta.

Oscilațiile pot fi:

- mecanice (energia cinetică se transformă în energie potențială și invers);
- electromagnetice (energia electrică trece în energie magnetică și invers);
- termice, în cazul variației periodice a parametrilor termici ai unui sistem.

Primul capitol al acestui manual este dedicat studiului oscilațiilor mecanice iar capitolul al doilea – propagării în spațiu și timp a oscilațiilor prin unde.

Experimente

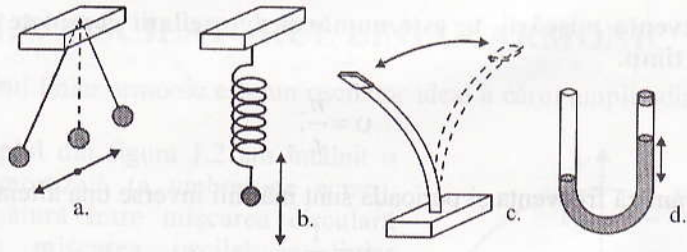


Fig. 1.1. Exemple de oscilatori: a) pendul gravitațional; b) pendul elastic; c) pendul cu arc lamelar; d) coloană de apă oscilantă.

1. De un fir lung și inextensibil suspendăm un corp pe care-l scoatem apoi din poziția de echilibru (fără să-i dăm o deviație prea mare față de poziția de repaus) (fig. 1.1, a). Greutatea corpului suspendat va determina revenirea lui către poziția de echilibru.

Un astfel de sistem este numit *pendul gravitațional.*

2. De un resort suspendăm un corp și prin intermediul lui tragem resortul în jos. Lăsat liber, sistemul se mișcă în sus și în jos sub acțiunea forței elastice. Acesta este un exemplu de *pendul elastic* (fig. 1.1, b).

3. O bandă de oțel se fixează la unul din capete (fig. 1.1, c); celălalt capăt este deviat şi apoi lăsat liber. Lama va vibra (oscila) între două poziții extreme, de-o parte şi de alta a poziției de echilibru. Sistemul se numeşte *pendul cu arc lamelar.*

4. Într-un tub de sticlă îndoit în formă de U turnăm apă. Astupăm unul din capete cu un dop şi suflăm aer la celălalt capăt. Coloana de apă este pusă în mişcare şi, ca urmare a acestui impuls inițial, va executa oscilații de-o parte şi de alta a unei poziții de echilibru. Este vorba de o *coloană oscilantă de lichid.* (fig. 1.1, d).

În toate cazurile de mai sus are loc o mişcare continuă de o parte şi de alta a unei poziții inițiale de repaus.

Mişcarea care se repetă la intervale de timp egale şi se desfăşoară simetric față de o poziție de echilibru se numeşte mişcare oscilatorie.

1.2. MĂRIMI CARACTERISTICE MIŞCĂRII OSCILATORII

Pentru studiul mişcării oscilatorii se definesc următoarele mărimi fizice:

1. Perioada mişcării oscilatorii, T, reprezintă timpul necesar efectuării unei oscilații complete.

Dacă notăm cu n numărul de oscilații complete efectuate de oscilator în intervalul de timp t, atunci avem:

$$T = \frac{t}{n}.$$

Unitatea de măsură în S.I. este:

$$[T]_{SI} = 1s.$$

2. Frecvența mişcării, υ, este numărul de oscilații complete efectuate în unitatea de timp.

$$\upsilon = \frac{n}{t}.$$

Observăm că frecvența şi perioada sunt mărimi inverse una alteia:

$$\upsilon = \frac{1}{T}.$$

De aceea rezultă:

$$[\upsilon]_{SI} = 1s^{-1} = 1\text{Hz}.$$

3. Elongația mişcării, y, reprezintă depărtarea (deplasarea) oscilatorului față de poziția de echilibru la un moment dat.

În S.I. unitatea de măsură a elongației este metrul:

$$[y]_{SI} = 1\text{m}.$$

4. Amplitudinea mişcării, A, este elongaţia maximă pe care o poate avea oscilatorul în timpul oscilaţiei.

Amplitudinea se măsoară în S.I. ca şi elongaţia, în metri.

Dacă în exemplele prezentate în fig. 1.1 lăsam sistemele (corpurile) să oscileze un interval de timp mai mare, observăm că amplitudinea de oscilaţie scade în timp.

Oscilaţia în timpul căreia amplitudinea scade datorită forţelor de rezistenţă (frecare) se numeşte **oscilaţie amortizată**.

Amortizarea oscilaţiilor libere ale unui sistem mecanic este cauzată de pierderile de energie inevitabile prin frecare şi rezistenţa aerului, datorită cărora se cedează mediului înconjurător energie sub formă de căldură.

Dacă însă amplitudinea de oscilaţie rămâne neschimbată de la o oscilaţie la alta, este vorba de **oscilaţie neamortizată**.

Un exemplu de mişcare oscilatorie neamortizată este ilustrat de următorul experiment:

Experiment

Pe marginea unui disc fixăm o bilă. Rotim discul cu viteză unghiulară constantă (fig. 1.2). Cu ajutorul unei lămpi de proiecţie, proiectăm pe un ecran mişcarea bilei de pe disc.

Vom constata că umbra bilei are o mişcare periodică, simetrică faţă de poziţia de echilibru. Mişcarea oscilatorie a umbrei bilei are amplitudine constantă în timp, deci este neamortizată.

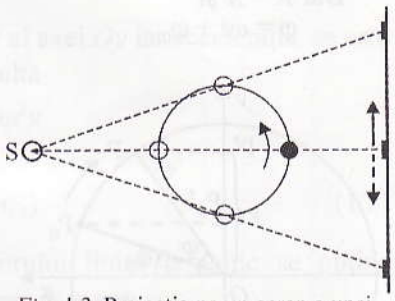


Fig. 1.2. Proiecţia pe un ecran a unei mişcări circulare uniforme.

1.3. OSCILATORUL LINIAR ARMONIC

Oscilatorul liniar armonic este un oscilator ideal a cărui amplitudine nu scade în timp.

În exemplul din figura 1.2 am întâlnit o oscilaţie neamortizată (a umbrei pe ecran). Există o legătură între mişcarea circulară uniformă şi mişcarea oscilatorie liniar armonică.

Să urmărim în acelaşi timp mişcarea circulară uniformă cu viteza unghiulară ω pe un cerc de rază R a unui punct material P de masă m, şi mişcarea proiecţiei sale P' pe axa Oy (diametrul vertical) (fig. 1.3).

Observăm că în timp ce punctul P de pe cerc face o rotaţie completă, proiecţia sa P' efectuează o oscilaţie completă cu amplitudinea $A = R$ (egală cu raza cercului).

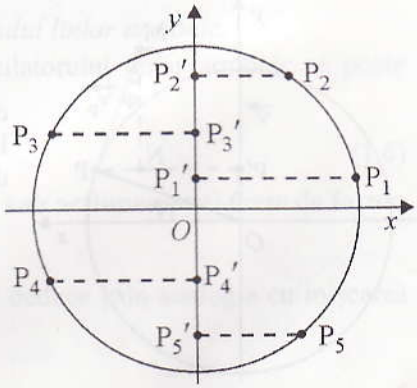


Fig. 1.3. Mişcarea concomitentă a punctului P şi a proiecţiei sale P'.

Pentru a stabili formulele caracteristice oscilatorului liniar armonic vom folosi analogia cu mișcarea circulară.

1.3.1. Relații între mărimile caracteristice

1. Elongația y a oscilatorului la un moment dat t se obține prin proiectare pe diametrul vertical a razei vectoare ce caracterizează poziția punctului P de pe cerc la acel moment dat.

$$y = OP'.$$

Din triunghiul OPP':

$$\sin \varphi = \frac{y}{R}.$$

Rezultă $y = R \sin \varphi$.
Dar $R = A$ și
$\varphi = \omega t + \varphi_0$

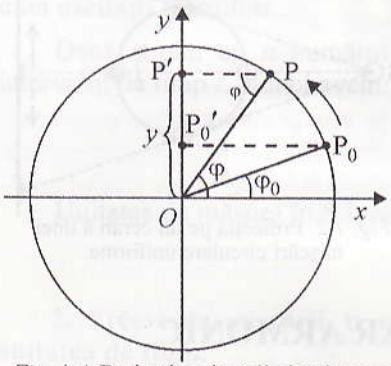


Fig. 1.4. Proiecția mișcării circulare pe diametru. Elongația

deci elongația oscilatorului liniar armonic are expresia:

$$y = A \sin (\omega t + \varphi_0). \qquad (1.1)$$

unde $\begin{cases} \omega = \text{pulsația oscilațiilor}, & [\omega]_{SI} = \dfrac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \varphi_0 = \text{faza inițială}, & [\varphi_0]_{SI} = \text{rad}. \end{cases}$

Dacă în fig. 1.4 oscilatorul P' ar fi fost la momentul inițial în P_0' (corespunzător punctului P_0 de pe cerc), faza la momentul inițial ar fi fost φ_0.

Atunci, la momentul t, faza este $\varphi = \omega t + \varphi_0$. Unitatea de măsură în S.I. pentru fază este

$$[\varphi]_{SI} = \text{rad}.$$

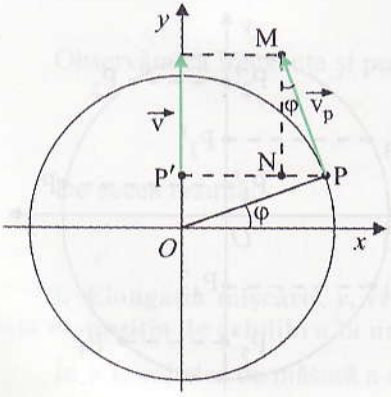


Fig. 1.5. Viteza oscilatorului liniar armonic.

2. Viteza oscilatorului liniar armonic se obține prin proiectarea pe diametru a vitezei liniare v_P a punctului P aflat în mișcare circulară uniformă.

$$\text{În } \Delta MPN, \cos \varphi = \frac{MN}{MP} = \frac{v}{v_P}.$$

Rezultă $v = v_P \cos \varphi$.

Dar viteza liniară a punctului P este (de la mișcarea circulară uniformă):

$$v_P = \omega R$$

iar faza mişcării este

$$\varphi = \omega t + \varphi_0.$$

Rezultă:

$$v = \omega A \cos(\omega + \varphi_0). \qquad (1.2)$$

3. Acceleraţia oscilatorului liniar armonic va fi obţinută prin acelaşi procedeu: proiectăm pe diametrul vertical acceleraţia punctului P (acceleraţia centripetă $a_{cp} = \omega^2 R$).

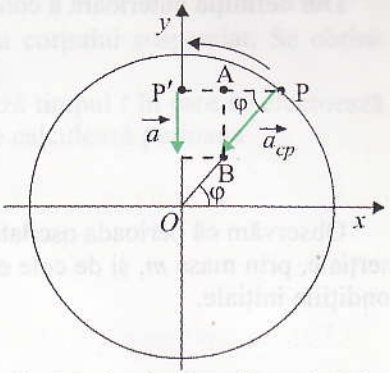


Fig. 1.6. Acceleraţia oscilatorului liniar armonic.

$$\text{În } \Delta APB, \sin\varphi = \frac{AB}{BP} = \frac{a}{a_{cp}}.$$

Întrucât mişcarea lui P' este în sensul poziti v al axei Oy iar acceleraţia sa este îndreptată în sens contrar sensului de mişcare, rezultă

$$a = -\omega^2 R \sin\varphi = -\omega^2 y$$

adică

$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (1.3)$$

4. Forţa responsabilă de mişcarea oscilatorului liniar armonic se obţine aplicând principiul al II-lea al mecanicii newtoniene: $F = ma$.

Rezultă:

$$F = -m\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (1.4)$$

Întrucât pentru un oscilator dat m şi ω sunt constante, notăm

$$k = m\omega^2. \qquad (1.5)$$

unde k se numeşte *constanta elastică a oscilatorului liniar armonic.*

Atunci, forţa responsabilă de mişcarea oscilatorului liniar armonic se poate scrie:

$$F = -ky. \qquad (1.6)$$

***Definiţie.* Un punct material care se mişcă sub acţiunea unei forţe de forma $F = -ky$ se numeşte oscilator liniar armonic.**

5. Perioada oscilatorului liniar armonic se deduce prin analogie cu mişcarea circulară uniformă, unde

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Din definiția anterioară a constantei elastice a oscilatorului rezultă

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ deci}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.7)$$

Observăm că perioada oscilatorului liniar armonic depinde de proprietățile sale inerțiale, prin masa m, și de cele elastice, prin constanta elastică k și nu depinde de condițiile inițiale.

ACTIVITATE EXPERIMENTALĂ

Pendulul elastic

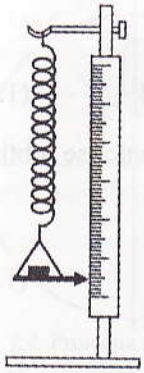


Fig. 1.7.

Tema: Determinarea constantei elastice k a unui resort prin metoda statică și prin metoda dinamică.

Materiale necesare

Se folosește un oscilator armonic simplu confecționat dintr-un resort din sârmă subțire de oțel fixat la capătul superior de un suport vertical. De capătul inferior se suspendă un mic platan prevăzut cu un ac indicator orizontal și cu un cârlig pentru agățarea diferitelor mase. Resortul împreună cu platanul și greutățile pot oscila în fața unei rigle verticale gradate în mm și cm. Indicatorul orizontal permite citirea exactă a deplasărilor (fig. 1.7).

Modul de lucru

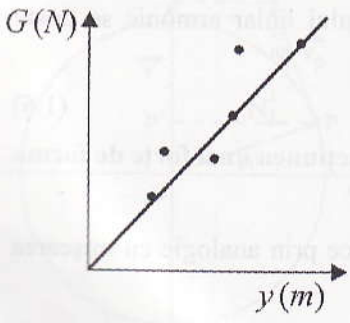


Fig. 1.8. Determinarea constantei elastice k prin metoda statică.

I. **Metoda statică**

Se suspendă de platan diferite mase marcate. Se măsoară și se notează deplasările corespunzătoare fiecărei greutăți. Citirea diviziunii este corectă atunci când ochiul observatorului și acul indicator se află pe aceeași orizontală.

Se face o reprezentare grafică luând pe ordonată valorile greutății $G(N)$ iar pe abscisă deplasările $y(m)$ corespunzătoare (fig. 1.8). Din acest grafic se va determina panta dreptei $G = ky$, adică constanta k.

Întrucât se lucrează cu sistemul aflat în echilibru, aceasta este o metodă statică.

II. **Metoda dinamică**

Se cântăreşte resortul cu platanul şi cu masa corpului suspendat. Se obţine astfel m.

Se pune sistemul în oscilaţie. Se cronometrează timpul t în care se efectuează n oscilaţii complete, de exemplu 20 de oscilaţii. Se calculează perioada

$$T = \frac{t}{n}.$$

Dar ştim că $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, deci

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}.$$

Rezultatele se vor trece într-un tabel de forma:

Nr. crt.	m (kg)	n	t (s)	T (s)	T_{med} (s)	k (N/kg)	k_{med} (N/kg)

Se vor face câte 3 măsurători pentru 3 mase diferite, calculându-se valoarea medie.

Pentru un acelaşi resort, valoarea constantei elastice k determinată prin metoda statică trebuie să fie aproximativ egală cu cea determinată prin metoda dinamică.

Probleme rezolvate

1. Un oscilator liniar ce oscilează cu amplitudinea $A = 2$ cm se află după $t_1 = 0{,}01$ s de la începerea mişcării la distanţa $y_1 = \sqrt{2}$ cm de poziţia de echilibru. Se cer:

a) perioada oscilaţiilor;

b) viteza oscilatorului în poziţia dată;

c) acceleraţia maximă.

Faza iniţială a oscilaţiei este nulă.

Rezolvare

Înlocuim în expresia elongaţiei $y = A \sin(\omega + \varphi_0)$ datele problemei şi obţinem

$$\sqrt{2} = 2 \sin \omega \cdot 0{,}01$$

deci $\sin \omega \cdot 0{,}01 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, adică $\omega \cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{4}$.

Rezultă

$$\omega = \frac{100\pi}{4} = 25\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

a)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{25} = 0{,}08\ \text{s}.$$

b)

$$v_1 = \omega A \cos \omega t_1$$

Dar, de mai sus, avem că

$$\omega t_1 = \frac{\pi}{4}$$

deci

$$v_1 = 25\pi \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 25\sqrt{2}\pi \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 1{,}1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) $a_{max} = \omega^2 A = 625\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 123{,}2\ \text{m/s}^2.$

2. Un oscilator constituit dintr-un punct material cu masa $m = 1{,}6 \cdot 10^{-2}$ kg, atârnat de capătul unui resort, vibrează sub acțiunea forței elastice a resortului, ecuația elongației având forma:

$$y = 10^{-1} \sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{8}\right)(m).$$

Aflați:

a) perioada;
b) viteza maximă;
c) forța maximă ce acționează asupra punctului material;
d) în cât timp τ corpul efectuează drumul de la jumătatea amplitudinii la $\frac{\sqrt{3}}{2}$ din amplitudine?

Rezolvare

a) Prin identificare cu ecuația oscilatorului liniar armonic, găsim că:

$$A = 10^{-1}\text{m},\ \omega = \frac{\pi}{8}\frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ și } \varphi_0 = \frac{\pi}{8}\text{rad}.$$

Deci

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 16\ \text{s}.$$

b)

$$v_{max} = \omega A = 3{,}92\ \text{cm/s};$$

c)

$$F_{max} = m\omega^2 A = 2{,}46 \cdot 10^{-4} N;$$

d) Dacă la momentul t_1 elongația era $y_1 = \frac{1}{2}A$ iar la momentul t_2 elongația devine $y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}A$ atunci $\tau = t_2 - t_1$.

Dar cum la momentul t_1 știm că $\frac{1}{2}A = \sin(\omega t_1 + \varphi_0)$, rezultă că

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}t_1 + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}, \text{ deci } \frac{\pi}{8}t_1 + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{6}.$$

Obținem că $t_1 = \frac{1}{3}$s.

Analog: $$\frac{\sqrt{3}}{2}A = A\sin(\omega t_2 + \varphi_0)$$

adică $$\sin\left(\frac{\pi}{8}t_2 + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

deci $$\frac{\pi}{8}t_2 + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{3}.$$

Rezultă $$t_2 = \frac{5}{3}\text{s},$$

adică $$\tau = t_2 - t_1 = \frac{4}{3}\text{s}.$$

3. Ecuația oscilației unui punct material de masă $m = 10$ g este $y = 2\sqrt{3} \cdot 10^{-3}\left(\sin 5t - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos 5t\right)$.

a) Să se determine faza inițială și amplitudinea.

b) Să se calculeze forța maximă ce acționează în timpul oscilațiilor.

Rezolvare

Se prelucrează expresia elongației și, printr-un artificiu de calcul, se scrie astfel încât să se poată folosi formula trigonometrică

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha.$$

Astfel, înmulțind și împărțind cu 2 și introducând în paranteză $\sqrt{3}$, obținem

$$y=4\cdot10^{-3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5t-\frac{1}{2}\cos 5t\right),$$

ceea ce înseamnă

$$y=4\cdot10^{-3}\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin 5t-\sin\frac{\pi}{6}\cos 5t\right),$$

adică

$$y=4\cdot10^{-3}\sin\left(5t-\frac{\pi}{6}\right),$$

de unde

$$A=4\cdot10^{-3}\text{ m},\quad \text{iar } \varphi_0=-\frac{\pi}{6}.$$

b)

$$F_{max}=m\omega^2A=10^{-2}\cdot25\cdot4\cdot10^{-3}=10^{-3}\text{ N}=1\text{ mN}.$$

4. Un corp suspendat de un resort execută oscilații armonice. Dacă la momentul t_1 are elongația $y_1=2$ cm și la momentul t_2 elongația este $y_2=3$ cm, iar vitezele corespunzătoare acestor momente sunt $v_1=5$ m/s respectiv $v_2=4$ m/s, aflați valoarea amplitudinii și a pulsației.

Rezolvare

$$\begin{cases}x_1=A\sin(\omega t_1+\varphi_0)\\ v_1=\omega A\cos(\omega t_1+\varphi_0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{x_1}{A}\right)^2=\sin^2(\omega t_1+\varphi_0)\\ \left(\frac{v_1}{\omega A}\right)^2=\cos^2(\omega t_1+\varphi_0).\end{cases}$$

Adunăm ecuațiile membru cu membru. Rezultă:

$$\frac{x_1^2}{A^2}+\frac{v_1^2}{\omega^2A^2}=1.$$

Procedând analog pentru momentul t_2, obținem:

$$\frac{x_2^2}{A^2}+\frac{v_2^2}{\omega^2A^2}=1.$$

Ultimele două relații formează un sistem din care rezultă:

$$\frac{x_1^2}{A^2}+\frac{v_1^2}{\omega^2A^2}=\frac{x_2^2}{A^2}+\frac{v_2^2}{\omega^2A^2},$$

de unde

$$\omega^2=\frac{v_1^2-v_2^2}{x_2^2-x_1^2};\ \omega=\sqrt{\frac{v_1^2-v_2^2}{x_2^2-x_1^2}}=134\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Din prima relație avem: $A^2=x_1^2+\frac{v_1^2}{\omega^2}$, și înlocuindu-l pe ω rezultă:

$$A=\sqrt{\frac{v_1^2x_2^2-v_2^2x_1^2}{v_1^2-v_2^2}}=4{,}23\text{ cm}.$$

5. Care este raportul dintre perioadele de oscilație ale unui corp suspendat de două resorturi având constantele elastice k_1 și k_2 legate întâi în serie și apoi în paralel?

Rezolvare

Pentru cazul legării în serie (fig. 1.9, a)

$$y=y_1+y_2$$

$$\frac{F}{k_{es}}=\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2}\Rightarrow\frac{1}{k_{es}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$$

$$T_s=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{es}}}=2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)}.$$

Pentru legare în paralel:

$$F=F_1+F_2$$

$$k_{ep}y=k_1y+k_2y\Rightarrow k_{ep}=k_1+k_2.$$

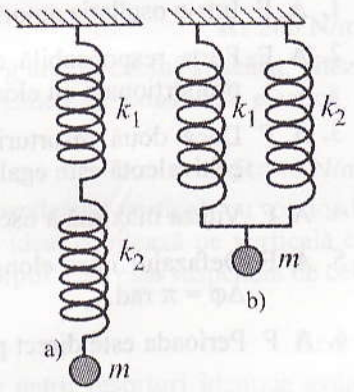


Fig. 1.9. Resorturi serie sau paralel

Deci

$$T_p=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{ep}}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}.$$

Astfel

$$\frac{T_s}{T_p}=\frac{k_1+k_2}{\sqrt{k_1k_2}}.$$

6. Un tub în formă de U conține o coloană de lichid de lungime *l*. Suflând la unul din capetele tubului, se produce o denivelare a lichidului din cele două ramuri. Să se exprime perioada oscilațiilor coloanei de lichid.

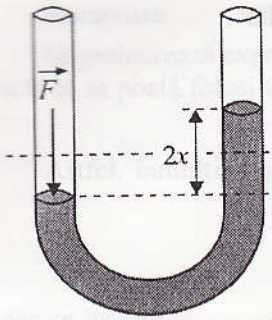


Fig. 1.10. Coloana oscilantă de lichid

Rezolvare:

Egalăm forțele din cele două ramuri (fig. 1.10):

$$F + P_o S = P_o S + G$$

unde S = secțiunea tubului, iar $G = \rho \cdot 2x \cdot S \cdot g$ (greutatea lichidului ridicat deasupra nivelului de referință în ramura din dreapta).

Rezultă

$F = 2\rho Sg \cdot x = kx$, forță de tip elastic, unde $k = 2\rho Sg$.

Atunci, dacă masa lichidului oscilant este $m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot l$, rezultă

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho Sl}{2\rho Sg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

Test

Alegeți A pentru afirmațiile adevărate sau F pentru cele false.

1. A F Într-o oscilație amortizată amplitudinea oscilațiilor este constantă în timp.
2. A F Forța responsabilă de mișcarea oscilatorului liniar armonic este direct proporțională cu elongația dar de sens contrar acesteia.
3. A F Dacă două resorturi elastice sunt legate în paralel, constanta elastică echivalentă este egală cu suma constantelor acestora.
4. A F Viteza maximă a oscilatorului liniar armonic este $\omega^2 A$.
5. A F Defazajul între elongație și accelerația oscilatorului liniar armonic este $\Delta\varphi = \pi$ rad.
6. A F Perioada este direct proporțională cu pulsația oscilațiilor.

Probleme propuse

1. Un corp efectuează o mișcare oscilatorie armonică descrisă de ecuația $y = 0{,}2 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$m. Calculați valorile maxime ale vitezei și accelerației în cursul oscilațiilor.

R: 1,256 m/s; 7,88 m/s^2.

2. Un punct material efectuează o mișcare armonică descrisă de ecuația $y = \frac{10}{\pi}\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ cm. Aflați viteza sa maximă.

R: 20 cm/s.

3. Un punct material de masă m = 20 g execută o mișcare oscilatorie descrisă de ecuația $y = 5\sqrt{3}\left(\sin 10t - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos 10t\right)$. Care este forța maximă ce acționează asupra sa în timpul mișcării?

R: 20 N.

4. Un mobil execută o mișcare oscilatorie armonică descrisă de execuția $y = A \sin(\pi t + \varphi_0)$. Știind că la momentul inițial elongația sa este 2 cm iar viteza este 2π cm/s, să se determine faza inițială φ_0.

R: $\frac{\pi}{4}$.

5. Un punct material efectuează oscilații armonice cu pulsația ω. Știind că la $t = 0$, $x = x_0$ și $v = v_0$ să se afle amplitudinea mișcării oscilatorii.

R: $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$.

6. Un oscilator liniar armonic trece prin punctele de coordonate $x_1 = 3$ cm și $x_2 = 4$ cm cu vitezele $v_1 = 4$ m/s, respectiv $v_2 = 3$ m/s. Dacă masa oscilatorului este $m = 20$ g, calculați constanta elastică a resortului.

R: 200 N/m.

7. Un oscilator armonic liniar având masa 100 g are, în cursul mișcării, viteza maximă 0,1 m/s și accelerația maximă 2 m/s^2. Calculați constanta elastică a resortului.

R: 40 N/m.

8. Un corp suspendat de un resort ideal oscilează vertical cu perioada $T_1 = 0{,}6$ s. Același corp suspendat de un alt resort ideal oscilează pe verticală cu perioada $T_2 = 0{,}8$ s. Aflați cu ce perioadă va oscila corpul dacă este suspendat de cele două resorturi legate în serie.

R: 1 s.

9. Un motor cu masa 128 kg este montat pe patru resorturi identice având fiecare constanta elastică $k = 2 \cdot 10^4$ N/m. Calculați perioada și frecvența sistemului.

R: 0,25 s; 4 Hz.

1.3.2. Energia oscilatorului liniar armonic

Oscilatorul liniar armonic este un punct material care se mișcă sub acțiunea unei forțe $F = -ky$. Energia sa totală este:

$$E = E_c + E_p = \frac{mv^2}{2} + \frac{ky^2}{2}.$$

Înlocuim $\begin{cases} y = A\sin(\omega t + \varphi_0) \\ v = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0). \end{cases}$

Rezultă:

$$E = \frac{m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2} + \frac{kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}.$$

Dar $m\omega^2 = k$. Atunci

$$E = \frac{kA^2}{2}\left[\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0)\right] \text{ adică}$$

$$E = \frac{kA^2}{2} \qquad (1.8)$$

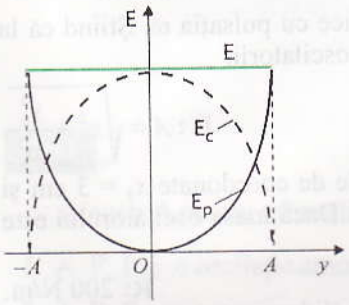


Fig. 1.11. Energia oscilatorului armonic

Energia oscilatorului liniar armonic este constantă în timp; deşi energiile cinetică şi potenţială variază continuu, trecând dintr-o formă în alta, suma lor rămâne aceeaşi (fig. 1.11).

Întrucât $E = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = 2\pi^2 m\upsilon^2 A^2$ rezultă că energia totală este proporţională cu pătratul amplitudinii şi cu pătratul frecvenţei oscilaţiilor.

Observăm că poziţiei de echilibru îi corespunde valoarea minimă a energiei potenţiale.

Probleme rezolvate

1. Un punct material oscilează după legea $y = A\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ (m). Aflaţi raportul dintre energiile cinetică şi potenţială ale punctului material la momentul $t_1 = T/4$ de la pornire, unde T este perioada oscilaţiei.

Rezolvare

Faza la momentul t_1 este:

$$\varphi_1 = \pi \cdot \frac{T}{4} - \frac{\pi}{6}$$

dar

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ s,$$

deci

$$\varphi_1 = \pi \cdot \frac{2}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

Aşadar

$$E_{p1} = \frac{kA^2}{2}\sin^2\varphi_1 \text{ şi } E_{c1} = \frac{kA^2}{2}\cos^2\varphi_1$$

deci

$$\frac{E_{c1}}{E_{p1}} = \frac{\cos^2\frac{\pi}{3}}{\sin^2\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}.$$

2. Un corp cu masa $m = 10$ g oscilează pe orizontală conform ecuației $x = 0{,}2\sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$(m). Să se calculeze energia cinetică și cea potențială în momentele în care elongația este un sfert din amplitudine (se consideră $\pi^2 \simeq 10$).

Rezolvare

Prin identificare cu ecuația oscilatorului liniar armonic rezultă

$$A = 0{,}2 \text{ m şi } \omega = 10\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Aşadar

$$k = m\omega^2 = 10\cdot 10^{-3}\cdot 10^2\pi^2 = 10\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

iar

$$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{10\cdot(2\cdot 10^{-1})^2}{2} = 0{,}2\text{J} = 200 \text{ mJ}.$$

Energia potențială va fi

$$E_p = \frac{ky^2}{2} = \frac{k\left(\frac{A}{4}\right)^2}{2}$$

adică

$$E_p = \frac{1}{16}\frac{kA^2}{2} = \frac{E}{16} = 12{,}5 \text{ mJ}$$

iar

$$E_c = E - E_p = \frac{kA^2}{2} - \frac{kA^2}{2}\cdot\frac{1}{16} = \frac{15}{16}\cdot E = 187{,}5 \text{ mJ}.$$

3. Sub acțiunea unei forțe $F = 1$ N un corp de masă m = 100 g atârnat de capătul unui resort se deplasează cu $x = 10$ cm față de poziția de echilibru.

Se cer:

a) pulsația și frecvența oscilațiilor libere;

b) raportul dintre energia cinetică și energia potențială la o distanță de origine egală cu jumătatea amplitudinii.

Rezolvare

a)

$$F = kx \Rightarrow k = \frac{F}{x}.$$

Dar

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{F}{x \cdot m}} = \sqrt{\frac{1}{10^{-1} \cdot 10^{2} \cdot 10^{-3}}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

deci

$$\upsilon = \frac{\omega}{2\pi} = 1{,}59 \text{ Hz}.$$

b)

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{k\left(\frac{A}{2}\right)^2}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{kA^2}{2} = \frac{1}{4} E.$$

$$E_c = E - E_p = E - \frac{1}{4} E = \frac{3}{4} E.$$

Deci

$$\frac{E_c}{E_p} = \frac{\frac{3}{4} E}{\frac{1}{4} E} = 3.$$

Probleme propuse

1. Un punct material de masă $m = 5$ g efectuează o mișcare oscilatorie armonică cu frecvența $\upsilon = 0{,}5$ Hz și amplitudinea $A = 3$ cm.

Calculați:

a) viteza când elongația este $y_1 = 1{,}5$ cm;

b) forța elastică maximă;

c) energia totală.

R: a) $8{,}14 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$; b) 1,47 mN; c) 22 μJ.

2. Un corp de masă m = 4 kg suspendat de un resort oscilează vertical. Resortul se întinde cu $\Delta l = 0{,}1$ m sub acțiunea unei forțe $F = 10$ N.

Calculați:

a) perioada;

b) pulsația oscilațiilor;

c) amplitudinea oscilațiilor corpului sub acțiunea propriei greutăți ($g = 10\ m/s^2$);

d) energiile cinetică și potențială în poziția în care viteza este jumătate din viteza maximă.

R: a) $T = 1{,}256$ s; b) $\omega = 5\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$; c) $A = 0{,}4$ m; d) $E_c = \dfrac{E}{4} = 2\text{J}, E_p = 6$ J.

3. Un punct material cu masa $m = 10$ g oscilează după legea $y = 5\sin\dfrac{\pi}{6}t$ (cm).

Se cer:

a) forța maximă ce acționează asupra sa;

b) energia totală;

c) expresiile pentru energiile cinetică și potențială.

R: a) $13\cdot10^{-5}N$; b) 3,42 J; c) $E_c = 3{,}42\cdot10^{-6}\cos^2\dfrac{\pi}{6}t$;

$$E_p = 3{,}42\cdot10^{-6}\sin^2\frac{\pi}{6}t\ (\text{J}).$$

4. Calculați elongația oscilatorului liniar armonic în punctele în care energia sa cinetică este egală cu energia sa potențială elastică.

R: $\pm\dfrac{A\sqrt{2}}{2}$.

5. În ce raport se găsesc energia cinetică și cea potențială a oscilatorului liniar armonic în punctele în care elongația este jumătate din amplitudine?

R: 4.

6. Un punct material oscilează după legea $y = 2\sin\left(\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$(m). Aflați raportul dintre energiile cinetică și potențială ale punctului material la momentul $t_1 = T/4$ de la pornire, unde T este perioada oscilației.

R: 1.

7. Un punct material având masa $m = 4\cdot10^{-2}$ kg oscilează conform ecuației: $x = \dfrac{1}{2\pi}\sin\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$(m). Calculați energia cinetică la momentul $t = 10$ s de la începerea mișcării.

R: 10 mJ.

8. Legea de mişcare a unui oscilator liniar armonic este $y = A\sin\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)$. Calculaţi raportul dintre energiile sale cinetică şi potenţială la momentul $t = \frac{T}{24}$.

R: $\frac{1}{3}$.

1.3.3. Pendulul gravitaţional

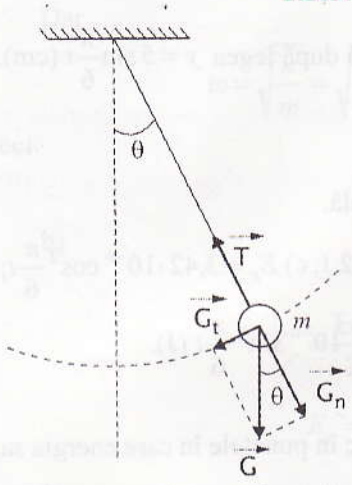


Fig. 1.12. Forţele care acţionează asupra pendulului

Un pendul gravitaţional este format dintr-un corp de mici dimensiuni, cu masa m, suspendat de un fir inextensibil cu masa neglijabilă şi cu lungimea l.

Dacă pendulul este deplasat din poziţia sa de echilibru şi apoi este lăsat liber, el va oscila într-un plan vertical datorită forţei de gravitaţie. Traiectoria descrisă de punctul material este un arc de cerc. Forţele care acţionează asupra lui sunt: $\vec{G} = m\vec{g}$ şi tensiunea în fir $\vec{T}$ (fig. 1.12).

În timp ce componenta lui $\vec{G}$ pe direcţia firului G_n se anulează cu tensiunea din fir, componenta tangenţială G_t va determina revenirea pendulului către poziţia de echilibru.

Aşadar forţa de restabilire este

$$F = G_t = -\,mg\sin\theta.$$

Întrucât forţa F nu este proporţională cu elongaţia unghiulară θ ci cu $\sin\theta$, mişcarea pendulului nu este o mişcare armonică.

Totuşi, pentru unghiuri mici $\theta < 5°$, putem scrie $\sin\theta \simeq \theta$ în radiani, după cum reiese din tabelul următor:

Unghiul θ		sin θ
grade	radiani	
0°	0,0000	0,0000
2°	0,0349	0,0349
5°	0,0873	0,0872

Folosind această aproximaţie, expresia forţei de revenire devine

$$F = -\,mg\theta.$$

Exprimăm unghiul θ în radiani, în funcţie de lungimea arcului subîntins (care, pentru unghiuri mici, coincide cu lungimea corzii x) şi de raza cercului, l.

$$\theta = \frac{x}{l}.$$

Așadar forța de revenire devine

$$F = -mg\frac{x}{l} = -kx,$$

deci pentru oscilații de mică amplitudine ($\theta < 5°$) forța de revenire este de tip elastic iar mișcarea pendulului este o mișcare oscilatorie armonică

Întrucât $k = \frac{mg}{l}$, perioada proprie de oscilație a pendulului $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ devine

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (1.9)$$

Observăm că perioada pendulului gravitațional este independentă de masa sa. Întrucât, pentru unghiuri mici, perioada pendulului gravitațional este independentă de amplitudine, pendulul poate fi folosit la măsurarea timpului. Pendulul gravitațional oferă o metodă simplă pentru determinarea valorii accelerației gravitaționale g, deoarece l și T pot fi ușor și precis măsurate.

ACTIVITATE EXPERIMENTALĂ

Studiul pendulului gravitațional

Tema: Determinarea valorii accelerației gravitaționale g.

Materiale necesare

- fir lung și subțire cu lungimea $l = 1$ m, suspendat la un capăt;
- o mică sferă de plumb, oțel sau bronz cu diametrul de 2–3 cm;
- cronometru.

Modul de lucru

- construiți pendulul gravitațional, atârnând sfera metalică de fir;
- scoateți pendulul din poziția de echilibru, deplasându-l față de verticală cu un unghi θ care să nu depășească 5° și apoi lăsați-l liber;
- cronometrați un anumit număr de oscilații (n), de exemplu 20, și obțineți timpul t.
- determinați perioada $T = \frac{t}{n}$;
- calculați accelerația gravitațională $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$;
- faceți mai multe determinări;
- treceți rezultatele într-un tabel de forma:

roxy maneliștea

danuț

Nr. crt	n oscilații	t (s)	T (s)	T_m (s)	g (m/s^2)	g_m (m/s^2)
1.						
2.						

Problemă rezolvată

Un pendul gravitațional este amplasat într-un cărucior care se mișcă rectiliniu cu accelerația $\vec{a}$. Determinați perioada de oscilație a pendulului.

Rezolvare

Dacă pendulul este supus acțiunii mai multor forțe, în locul accelerației gravitaționale g apare accelerația imprimată de rezultanta forțelor ce acționează asupra punctului material de masă m.

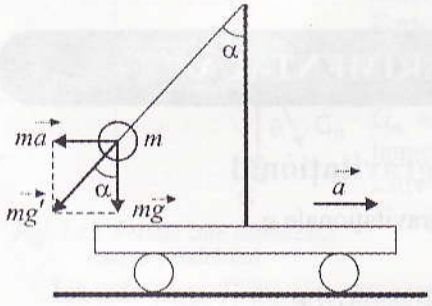


Fig. 1.13.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}.$$

Din figura 1.13, se vede că:

$$g' = \sqrt{a^2 + g^2},$$

deci

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}.$$

Probleme propuse

1. Două pendule gravitaționale oscilează în același loc cu frecvențele $\upsilon_1 = 27$ Hz și $\upsilon_2 = 9$ Hz. Care este raportul lungimilor lor?

R: $\frac{l_2}{l_1} = \left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^2 = 9.$

2. Un pendul este amplasat într-un lift care se deplasează cu accelerația a. Să se determine perioada de oscilație a pendulului:

a) când liftul urcă;

b) când liftul coboară.

R: a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$; b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$.

3. Un pendul gravitațional se fixează de un cadru așezat pe un cărucior. Căruciorul se mișcă pe un cerc de raza R în plan orizontal. Care este perioada pendulului?

$$\mathbf{R}: T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g^2 + \frac{v^4}{R^2}}}.$$

4. Un pendul simplu oscilează 200 oscilații pe minut iar altul, în același loc, efectuează 300 oscilații pe minut. Să se calculeze raportul lungimilor celor două pendule.

$$\mathbf{R}: \frac{l_1}{l_2} = 2{,}25.$$

5. Un pendul gravitațional de lungime l_0 are perioada T_0 la $t_0 = 0°C$. Dacă temperatura mediului exterior devine t, iar coeficientul de dilatare liniară al firului este α, care va fi perioada sa?

$$R: T = T_0\sqrt{1 + \alpha t}.$$

6. Un pendul matematic atârnă de tavanul unui lift în repaus și are perioada de oscilație T_0. Dacă liftul urcă uniform accelerat cu $a = 0{,}5$ g, calculați perioada pendulului.

$$\mathbf{R}: T = \sqrt{\frac{2}{3}}T_0.$$

1.3.4. Reprezentarea mărimilor oscilatorii liniar armonice

Mărimile oscilatorii liniar armonice pot fi reprezentate: analitic, grafic și fazorial.

a) **Reprezentarea analitică** se face sub forma unor funcții matematice, de exemplu:

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0);$$
$$v = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0);$$
$$a = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

b) **Reprezentarea grafică** se face prin desenarea formei funcției respective. În fig. 1.14 sunt reprezentate grafic funcțiile $y = y(t)$, $v = v(t)$ și $a = a(t)$.

Viteza este defazată înainte cu $\pi/2$ (sau $T/4$) față de elongație iar accelerația este defazată cu π (sau $T/2$) față de elongație, adică este în opoziție de fază cu elongația.

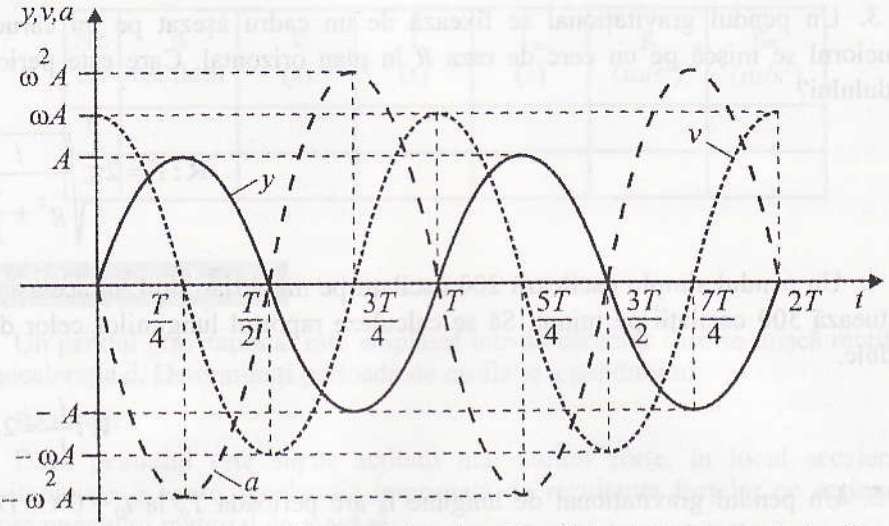


Fig. 1.14. Graficele elongației, vitezei și accelerației oscilatorului liniar armonic (φ_0=0)

c) **Reprezentarea fazorială** se face cu ajutorul unor vectori numiți **fazori**. **Fazorul este un vector rotitor ce reprezintă o mărime alternativ sinusoidală** (**y**, **v** sau **a** pentru oscilatorul liniar armonic, dar și tensiunea electrică sau intensitatea curentului în curent alternativ).

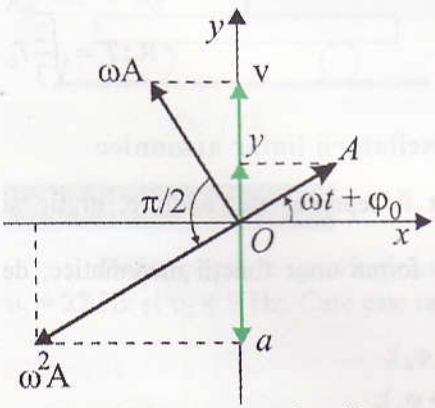


Fig. 1.15. Reprezentarea fazorială a elongației, vitezei și accelerației oscilatorului liniar armonic

Fazorul are următoarele caracteristici:

1. Modulul fazorului este egal cu amplitudinea mărimii oscilatorii pe care o reprezintă.

2. Frecvența de rotație a fazorului coincide cu frecvența mărimii alternative sinusoidale pe care o reprezintă.

3. Unghiul făcut de fazor la momentul inițial $t = 0$ cu o axă arbitrară (de obicei Ox) reprezintă faza inițială φ_0 a mărimii oscilatorii pe care o reprezintă.

4. Unghiul făcut de fazor la un moment oarecare de timp t reprezintă faza mărimii oscilatorii la acel moment, $\varphi = \omega t + \varphi_0$.

5. Proiecția fazorului pe o axă perpendiculară pe prima (deci proiecția pe axa Oy) reprezintă elongația mărimii oscilatorii respective.

Astfel, elongația, viteza și accelerația în mișcarea armonică sunt date în fiecare moment de proiecțiile extremităților vectorilor de modul A, ωA, respectiv $\omega^2 A$; ultimii doi sunt defazați cu $\pi/2$, respectiv cu π față de vectorul A (fig. 1.15).

1.4. COMPUNEREA OSCILAȚIILOR

În numeroase situații întâlnite în practică un corp este supus simultan acțiunii mai multor forțe care, dacă ar acționa separat, ar imprima fiecare o mișcare oscilatorie.

De exemplu, într-un corp solid, particulele constituente (atomi sau ioni) se află într-o continuă vibrație în jurul unor poziții de echilibru stabil. Mișcarea unei astfel de particule este rezultatul compunerii oscilațiilor independente imprimate acesteia de interacțiunea cu fiecare vecin în parte.

Alte exemple întâlnim în cazul clădirilor, podurilor, solicitate simultan de mai multe acțiuni exterioare periodice (vibrațiile solului ca urmare a traficului greu, vântul în rafale, variațiile de temperatură zi-noapte). Un cutremur solicită o clădire la vibrații independente orientate perpendicular una față de cealaltă, mișcarea de ansamblu a clădirii fiind rezultatul compunerii acestor oscilații.

1.4.1. Compunerea oscilațiilor paralele de frecvențe egale

Prin suprapunerea a două oscilații armonice de aceeași frecvență și aceeași direcție se obține tot o oscilație armonică de aceeași frecvență și aceeași direcție.

Dacă cele două oscilații care se compun au amplitudini diferite a_1 și a_2 și faze inițiale diferite φ_1 și φ_2, atunci ecuațiile elongațiilor lor sunt:

$$y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$y_1 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Elongația rezultată se obține prin însumarea elongațiilor y_1 și y_2, adică:

$$y = y_1 + y_2$$

și va avea ecuația

$$y = A \sin(\omega t + \varphi). \qquad (1.10)$$

Problema aflării amplitudinii A și fazei inițiale φ a oscilației rezultante se rezolvă ușor dacă folosim reprezentarea fazorială. Fie vectorii $\vec{a}_1$ și $\vec{a}_2$ corespunzători celor două mișcări componente, care fac, la momentul inițial, unghiurile φ_1, respectiv φ_2 cu axa Ox (fig. 1.16). Unghiul dintre cei doi vectori va fi $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ și va rămâne același în tot timpul mișcării, deoarece ambii vectori se rotesc cu aceeași viteză unghiulară ω.

Vectorul rezultat $\vec{A} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ este **fazorul oscilației rezultante.**

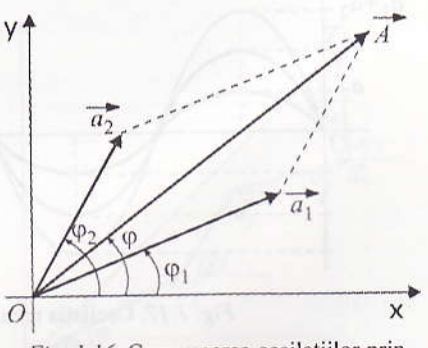


Fig. 1.16. Compunerea oscilațiilor prin metoda fazorială

Din figura 1.16 rezultă

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Ay}{Ax}$$

şi ţinând seama că proiecţia vectorului rezultant pe o axă este egală cu suma proiecţiilor vectorilor componenţi pe acea axă rezultă că:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_{1y} + a_{2y}}{a_{1x} + a_{2x}}, \text{ deci}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2}. \quad (1.11)$$

Observăm că faza iniţială φ a oscilaţiei rezultante depinde de amplitudinile şi fazele iniţiale ale oscilaţiilor care se compun.

Amplitudinea oscilaţiei rezultante este egală cu modulul vectorului $\vec{A}$ şi se obţine, conform regulilor de adunare vectorială, după formula:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (1.12)$$

Din această relaţie rezultă că amplitudinea oscilaţiei rezultante depinde de diferenţa de fază $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, dintre mişcările componente.

a) Dacă $\Delta\varphi = 2k\pi$, atunci $\cos 2k\pi = 1$ şi obţinem:

$$A = a_1 + a_2.$$

Amplitudinea oscilaţiei rezultante este egală cu suma amplitudinilor oscilaţiilor componente. În acest caz se spune că oscilaţiile sunt **în fază** (fig. 1.17, a).

b) Dacă $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$, atunci $\cos(2k + 1)\pi = -1$ şi obţinem

$$A = |a_1 - a_2|.$$

Cele două oscilaţii sunt **în opoziţie de fază** şi amplitudinea rezultantă va fi minimă (fig. 1.17, b). Dacă $a_1 = a_2$, oscilaţia se stinge.

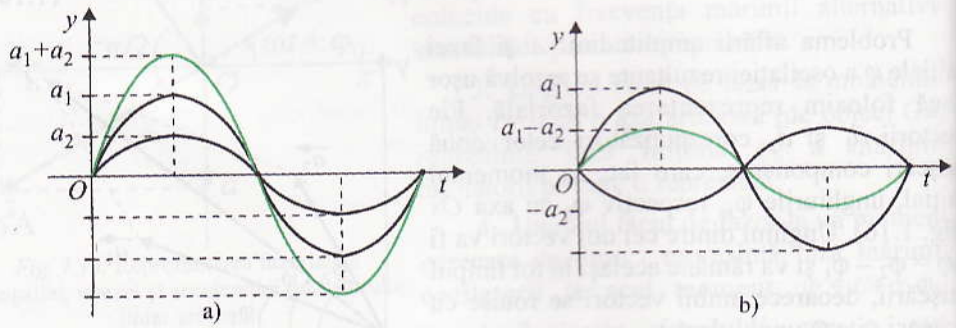


Fig. 1.17. Oscilaţia rezultantă: a) $A = a_1 + a_2$; b) $A = a_1 - a_2$

c) Dacă $\Delta\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, atunci $\cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$ şi obţinem $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Observații:

1. Dacă frecvențele oscilațiilor componente **diferă** între ele, oscilația rezultantă nu mai este armonică.

Un interes deosebit îl prezintă așa-numitele **bătăi** care se obțin prin compunerea a două oscilații cu pulsații ω_1 și ω_2 foarte apropiate. În cazul în care cele două oscilații au amplitudinile egale, se obține:

$$y = y_1 + y_2 = A\sin\omega_1 t + A\sin\omega_2 t = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right).$$

Oscilația rezultantă va fi aproape sinusoidală, de pulsație $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$, având însă amplitudinea lent variabilă cu pulsația $\frac{1}{2}|\omega_1 - \omega_2|$ (fig. 1.18).

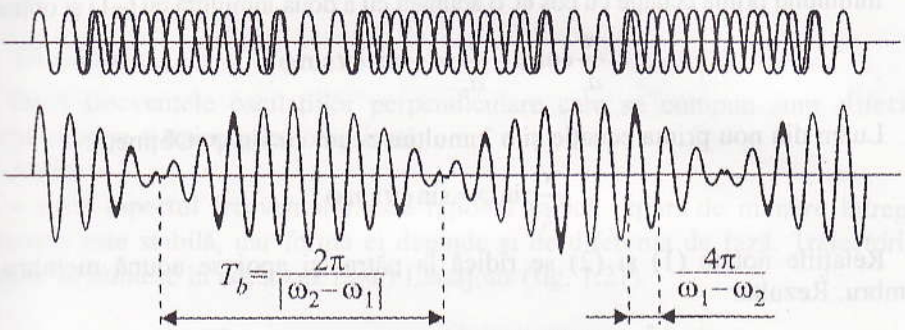


Fig. 1.18. Fenomenul bătăilor

2. Metoda fazorială pentru compunerea oscilațiilor poate fi generalizată pentru construcția rezultantei unui număr oarecare de vibrații paralele de aceeași frecvență (dar amplitudini și faze inițiale diferite) prin regula poligonului.

Dacă un punct material este supus simultan acțiunii a patru forțe elastice de aceeași direcție:

$$y_1 = a_1\sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$y_2 = a_2\sin(\omega t + \varphi_2)$$
$$y_3 = a_3\sin(\omega t + \varphi_3)$$
$$y_4 = a_4\sin(\omega t + \varphi_4)$$

atunci mișcarea oscilatorie rezultantă va fi:

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = A\sin(\omega t + \varphi)$$

unde valoarea amplitudinii A și faza inițială φ se obțin din fig. 1.19.

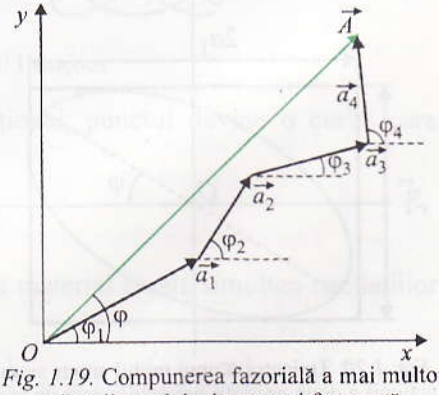


Fig. 1.19. Compunerea fazorială a mai multor vibrații paralele de aceeași frecvență

Metoda fazorială de compunere a mărimilor oscilatorii liniar armonice va fi foarte utilă în capitolul 3 la studiul curentului alternativ.

1.4.2. Compunerea oscilațiilor perpendiculare de frecvențe egale

Vom presupune că un mobil este supus simultan la două mișcări oscilatorii de frecvențe egale, perpendiculare între ele. Alegând cele două direcții de oscilație în lungul axelor Ox și Oy, elongațiile mișcărilor componente vor fi:

$$x = a_1 \sin \omega t \text{ și } y = a_2 \sin (\omega + \varphi).$$

Pentru a găsi traiectoria trebuie să eliminăm timpul între cele două ecuații. Pentru aceasta, le scriem sub forma:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a_1} = \sin \omega t \\ \dfrac{y}{a_2} = \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi. \end{cases}$$

Înmulțind prima ecuație cu $\cos \varphi$, o adunăm cu a doua înmulțită cu (-1) și obținem:

$$\frac{x}{a_1} \cos \varphi - \frac{y}{a_2} = -\cos \omega t \sin \varphi \qquad (1)$$

Luăm din nou prima ecuație și o înmulțim acum cu $\sin \varphi$. Obținem:

$$\frac{x}{a_1} \sin \varphi = \sin \omega t \sin \varphi \qquad (2)$$

Relațiile notate (1) și (2) se ridică la pătrat și apoi se adună membru cu membru. Rezultă:

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos \varphi + \left(\frac{y}{a_2}\right)^2 =$$

$$= \sin^2 \varphi (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)$$

adică

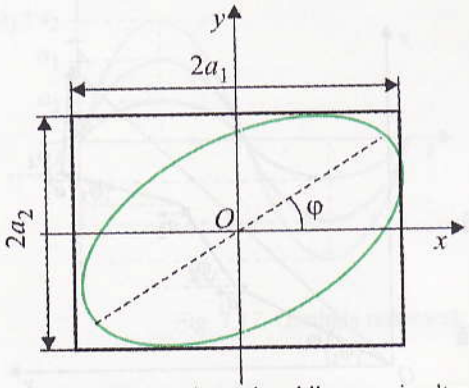


Fig. 1.20. Traiectoria unui mobil supus simultan acțiunii a două oscilații perpendiculare de aceeași frecvență

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \qquad (1.13)$$

Curba descrisă de această ecuație este în general o elipsă ai cărei parametri depind de diferența de fază φ dintre cele două oscilații perpendiculare care se compun (fig. 1.20).

Așadar, **prin compunerea a două oscilații perpendiculare de aceeași pulsație se obține tot o mișcare oscilatorie având traiectoria elipsă**

Se observă că pentru $\varphi = \frac{\pi}{2}$ şi $a_1 = a_2 = a$ ecuaţia elipsei devine:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad (1.14)$$

ceea ce reprezintă ecuaţia unui cerc.

Dacă, însă, $\varphi = k\pi$ unde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, ecuaţia traiectoriei devine:

$$y = \frac{a_2}{a_1} x \qquad (1.15)$$

adică punctul material se mişcă pe o dreaptă care trece prin origine şi face cu axa Ox un unghi a cărui tangentă este egală cu $\frac{a_2}{a_1}$.

Observaţie:

Dacă frecvenţele oscilaţiilor perpendiculare care se compun sunt **diferite**, punctul descrie o traiectorie complicată.

Astfel:

– dacă raportul frecvenţelor este raţional (adică raport de numere întregi), traiectoria este stabilă, dar forma ei depinde şi de diferenţa de fază. Traiectoriile obţinute se numesc în acest caz figuri Lissajous (fig. 1.21).

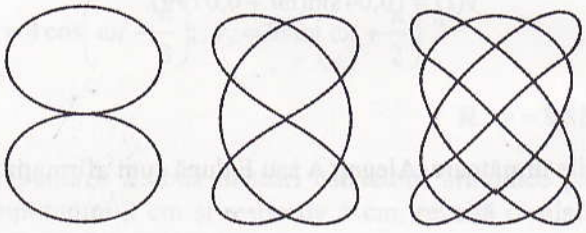


Fig. 1.21. Figuri Lissajous

– dacă raportul frecvenţelor nu este raţional, punctul devine o curbă care acoperă treptat o arie.

Problemă rezolvată

Care va fi legea de mişcare a unui punct material supus simultan oscilaţiilor paralele:

$$y_1 = 4\sin\omega t;\ y_2 = 2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right);\ y_3 = 5\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right).$$

Rezolvare

Aducem, mai întâi, toate ecuațiile la aceeași funcție trigonometrică, deci

$$y_3 = 5\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right).$$

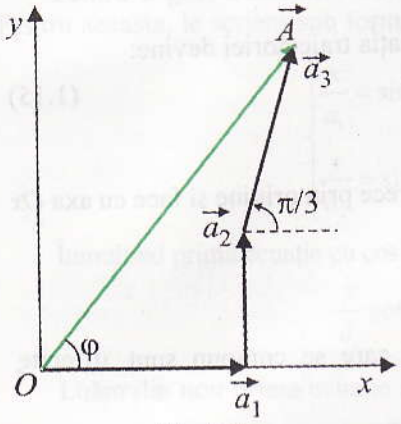


Fig. 1.22.

Trasăm diagrama fazorială (fig. 1.22). Din compunerea fazorilor obținem:

$$A = \sqrt{(a_{1x} + a_{2x} + a_{3x})^2 + (a_{1y} + a_{2y} + a_{3y})^2} =$$

$$= \sqrt{(4+0+3)^2 + \left(0+2+6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 10{,}04$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{0+2+6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{4+0+6\cdot\frac{1}{2}} = \frac{7{,}20}{7} = 1{,}02802$$

$$\varphi = 45^\circ 50' = 45{,}83^\circ = 0{,}0799 \text{ rad.}$$

Ecuația oscilației rezultante va fi:

$$y(t) = 10{,}04\sin(\omega t + 0{,}0799).$$

Test

Citiți afirmațiile următoare. Alegeți A sau F după cum afirmația este adevărată, respectiv falsă.

1. A F Dacă două oscilații paralele de aceeași frecvență sunt în fază, amplitudinile lor se adună.
2. A F Două oscilații paralele de amplitudini egale se sting dacă diferența de fază dintre ele este 2π radiani.
3. A F Fenomenul bătăilor se produce când se compun oscilații perpendiculare.
4. A F Amplitudinea bătăilor variază lent, rămânând practic constantă pe timpul mai multor oscilații.
5. A F Un mobil supus la două oscilații perpendiculare de aceeași frecvență simultan se poate mișca rectiliniu dacă diferența de fază este zero.

A F Figurile Lissajous se obțin în cazul compunerii oscilațiilor perpendiculare de aceeași frecvență.

A F Un punct material supus la două oscilații perpendiculare de aceeași frecvență și amplitudine se poate mișca pe un cerc.

Probleme propuse

1. Se compun mișcările oscilatorii armonice paralele: $y_1 = 2\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ și $y_2 = 3\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. Să se scrie ecuația mișcării rezultante.

R : $y = 4{,}35\sin(\pi t + 1{,}183)$.

2. Un punct material execută o oscilație armonică, compusă din două oscilații care se propagă pe aceeași direcție și au ecuațiile $y_1 = 4\sin 2\pi\left(t + \frac{1}{3}\right)$ și $y_2 = 3\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. Care va fi legea sa de mișcare?

R : $y = 6{,}76\sin(2\pi t - 1{,}27)$.

3. Ce mișcare execută un punct material supus simultan oscilațiilor paralele: $y_1 = 2\sin\omega t$; $y_2 = 4\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$; $y_3 = 5\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$?

R : $y = 8{,}88\sin(\omega t + 0{,}907)$.

4. Prin compunerea a două mișcări oscilatorii armonice paralele de aceeași frecvență, cu amplitudini 3 cm și respectiv 5 cm, rezultă o mișcare oscilatorie cu amplitudinea de 7 cm. Determinați:

a) defazajul dintre cele două mișcări;

b) viteza maximă a unui punct care execută mișcarea rezultantă, dacă viteza maximă a unui punct ce execută cea de-a doua mișcare este de 0,4 m/s.

R : a) $\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$; b) $v = 56$ cm/s.

5. Ce traiectorie va avea un punct material supus simultan oscilațiilor:

$$x(t) = 3\sin\pi(t+1)(\text{cm}) \text{ și } y(t) = 3\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)(\text{cm}) \ ?$$

R: cerc cu raza $r = 3$ cm.

1.5. MIŞCAREA OSCILATORIE ARMONICĂ AMORTIZATĂ

În cazul când pierderile de energie prin frecare ale oscilatorului nu sunt neglijabile, energia totală scade sensibil în timp.

Cum energia oscilatorului este proporţională cu pătratul amplitudinii

$$E = \frac{kA^2}{2}$$

înseamnă că amplitudinea scade în timp, adică oscilaţiile se sting.

De exemplu, în cazul mişcărilor într-un mediu lichid cu vâscozitate mică sau în cazul mişcării în aer cu viteză sub 1 m/s, forţa rezistentă este proporţională cu viteza:

$$R = -rv \tag{1.16}$$

unde r se numeşte coeficient de rezistenţă.

Ecuaţia oscilaţiilor amortizate este deci:

$$ma = -kx - rv \tag{1.17}$$

sau

$$a + 2bv + \omega_0^2 x = 0, \tag{1.18}$$

unde

$$b = \frac{r}{2m} \tag{1.19}$$

este coeficientul de amortizare iar

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

este pulsaţia oscilaţiilor proprii neamortizate.

După cum acţiunea rezistenţei mediului este mai puternică sau mai slabă decât acţiunea elasticităţii oscilatorului (concret, după cum $b > \omega_0$ sau $b < \omega_0$) pot exista următoarele cazuri:

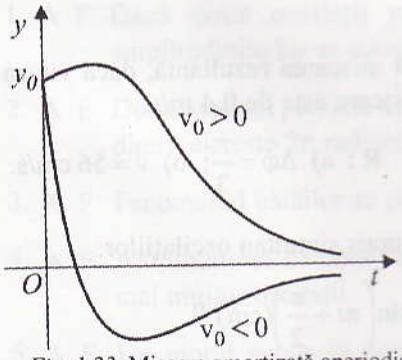


Fig. 1.23. Mişcare amortizată aperiodică.

1. Cazul frecărilor relativ intense ($b > \omega_0$)

În cursul mişcării, oscilatorul rămâne de aceeaşi parte a poziţiei de echilibru sau trece o singură dată prin poziţia de echilibru. Este un **regim aperiodic** de mişcare (fig. 1.23), iar $r > 2\sqrt{km}$.

2. Cazul amortizării critice ($b = \omega_0$)

Oscilațiile sistemului sunt în acest caz foarte repede amortizate (fig. 1.24).

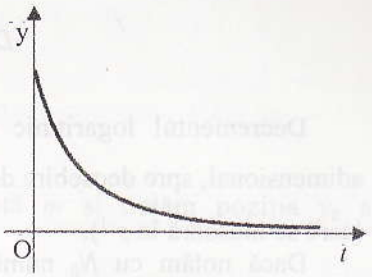


Fig. 1.24. Amortizare critică.

Cazul oscilațiilor critic amortizate este foarte important în practică întrucât foarte multe dispozitive de amortizare (amortizoarele autovehiculelor, amortizoarele hidraulice ale ușilor, echipajele mobile ale instrumentelor de măsură etc.) trebuie să funcționeze în **regim de amortizare critică**, pentru a evita oscilațiile sistemelor în jurul pozițiilor de echilibru. Rezistența mecanică pentru care se obține mișcarea aperiodică critică se numește rezistență critică și are valoarea $r_c = 2\sqrt{km}$.

3. Cazul frecărilor relativ slabe ($b < \omega_0$ sau $r < 2\sqrt{km}$).

Oscilatorul trece prin poziții situate de ambele părți ale poziției de echilibru, legea de mișcare fiind:

$$y = A_0 e^{-bt} \sin(\omega t + \varphi_0). \tag{1.20}$$

Amplitudinea scade exponențial în timp

$$A(t) = A_0 e^{-bt} = A_0 e^{-\frac{r}{2m}t} \tag{1.21}$$

iar oscilația se realizează cu pulsația:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} < \omega_0. \tag{1.22}$$

numită și pseudopulsație; ea este mai mică decât pulsația oscilațiilor proprii neamortizate, deoarece frecările întotdeauna se opun mișcării și o întârzie mărind perioada, adică micșorând frecvența oscilațiilor.

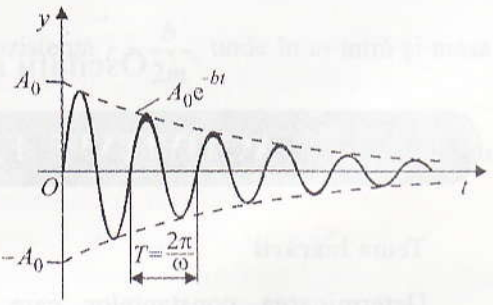


Fig. 1.25 – Mișcarea amortizată periodică

Oscilațiile amortizate sunt de tip sinusoidal, dar cu amplitudinea descrescătoare exponențial (fig. 1.25). Raportul elongațiilor sau al amplitudinilor la un interval de timp egal cu perioada T este:

$$\frac{y(t)}{y(t+T)} = \frac{A_0 e^{-bt} \sin(\omega t + \varphi_0)}{A_0 e^{-b(t+T)} \sin[\omega(t+T) + \varphi_0]} = e^{bT}.$$

Logaritmul natural al acestui raport se numește **decrement logaritmic** al oscilațiilor:

$$D = bT = \frac{2\pi b}{\omega} = \frac{2\pi b}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}. \quad (1.23)$$

Decrementul logaritmic este o măsură a amortizării oscilațiilor și este adimensional, spre deosebire de coeficientul de amortizare $b = \frac{r}{2m}$ (care se măsoară în s^{-1}).

Dacă notăm cu N_0 numărul de oscilații după care amplitudinea scade la jumătate, avem condiția:

$$A_0 e^{-b(t+N_0 T)} = \frac{1}{2} A_0 e^{-bt},$$

de unde rezultă expresia utilă, practică, a decrementului logaritmic:

$$D = \frac{\ln 2}{N_0} = \frac{0{,}693}{N_0}. \quad (1.24)$$

Cazul cel mai frecvent întâlnit în practică este cazul oscilațiilor amortizate: în natură, energia sistemelor aflate în mișcare de oscilație nu se conservă, sistemul pierzând continuu energie, amplitudinea oscilațiilor micșorându-se continuu prin frecări. Întrucât factorul de amortizare $b = \frac{r}{2m}$, mișcarea va fi cu atât mai rapid amortizată cu cât rezistența mediului este mai mare, iar masa punctului material care execută mișcarea, este mai mică.

Oscilații amortizate

ACTIVITATE EXPERIMENTALĂ

Tema lucrării

Determinarea constantelor care caracterizează oscilațiile amortizate: decrementul logaritmic D, constanta de amortizare b și coeficientul de rezistență r.

Materiale necesare

- Un pendul elastic din sârmă subțire de oțel fixat la capătul superior de un suport vertical. De capătul liber se suspendă un mic platan prevăzut cu ac indicator orizontal. Acul indicator oscilează în fața unei rigle gradate.

- Mase marcate.
- Cronometru.
- Balanță.

Modul de lucru

1. Suspendăm de resort o greutate marcată m și notăm poziția y_0 a indicatorului, citită pe scala suportului vertical.

2. Deviem greutatea în jos până la o anumită diviziune y, deci cu amplitudinea $A = y - y_0$ și îi dăm drumul să oscileze, pornind totodată cronometrul.

3. Numărăm oscilațiile complete N_0 până când amplitudinea se reduce la jumătate și citim timpul corespunzător $T_{1/2} = N_0 T$.

Amplitudinea se reduce la jumătate când acul indicator este în dreptul diviziunii:

$$y_0 + \frac{1}{2}(y - y_0).$$

4. Decrementul logaritmic se calculează cu formula (1.24):

$$D = \frac{0{,}693}{N_0}.$$

5. Coeficientul de amortizare va fi:

$$b = \frac{D}{T} = \frac{\ln 2}{N_0 T} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{T_{1/2}}.$$

6. Se va calcula și coeficientul de rezistență $r = \frac{b}{2m}$, unde în m intră și masa micului platan (dacă a fost folosit).

7. Se repetă experimentul pentru o altă masă marcată m, calculând din nou toate mărimile de mai sus.

1.6. OSCILATORI MECANICI CUPLAȚI

1.6.1. Oscilații mecanice forțate

Un oscilator real execută oscilații amortizate, datorită forței de frecare care consuma din energia acestuia. Pentru a întreține oscilațiile se poate interveni cu o forță din afară care să compenseze pierderile de energie datorate frecărilor.

De interes practic este cazul în care din exterior acționează o forță periodică

$$F = F_0 \sin \Omega t. \tag{1.25}$$

Pentru acest oscilator, conform principiului fundamental al mecanicii newtoniene:

$$ma = -kx - rv + F_0 \sin \Omega t. \tag{1.26}$$

Împărțind cu m și folosind notațiile din paragraful anterior obținem ecuația mișcării oscilatorii forțate:

$$a + 2bv + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t. \tag{1.27}$$

Experimental se constată că după un **regim tranzitoriu** de scurtă durată se stabilește **regimul permanent** în care particula efectuează oscilații întreținute de amplitudine constantă și cu frecvența forței periodice exterioare, numite **oscilații forțate.**

Amplitudinea oscilațiilor forțate depinde de:

– amplitudinea F_0 a forței care impune oscilația;

– valoarea pulsației proprii a sistemului (ω_0) și valoarea pulsației impuse de forța exterioară (Ω);

– valoarea coeficientului de amortizare b.

Amplitudinea și faza inițială a oscilațiilor forțate nu depind de condițiile inițiale. Pulsația oscilațiilor forțate este egală cu pulsația Ω a forței exterioare.

Oscilațiile forțate nu sunt amortizate deși în sistem există forțe de frecare (care influențează valoarea amplitudinii oscilațiilor forțate). În regim permanent energia rămâne constantă fiindcă sistemul absoarbe continuu energie de la sursa forței exterioare, ceea ce compensează pierderile datorate frecării.

Exemple de oscilații forțate întâlnim la: difuzoare, generatoare de ultrasunete, fundația unui motor, numeroase sisteme mecanice vibrante etc., ce sunt menținute în vibrație datorită unei forțe externe periodice.

1.6.2. Rezonanța

În cazul oscilațiilor forțate, atunci când frecvența forței exterioare Ω variază, amplitudinea A a oscilațiilor forțate variază. Maximul amplitudinii A are loc pentru

$$\Omega = \omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}}. \tag{1.28}$$

Pentru această frecvență are loc rezonanța elongațiilor iar amplitudinea devine maximă:

$$A_{max} = \frac{F_0}{r\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}. \tag{1.29}$$

Curbele din figura 1.26 se numesc curbe de rezonanță; cu cât maximul este mai înalt și curba mai îngustă, cu atât rezonanța este mai „ascuțită" iar coeficientul de amortizare b este mai mic.

Dacă amortizarea sistemului este mică atunci rezonanța se produce la o frecvență de excitație apropiată de frecvența proprie ω_0 a sistemului oscilant.

La rezonanță puterea absorbită este maximă.

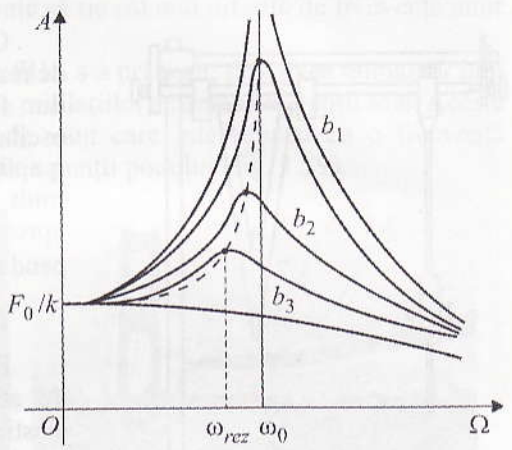


Fig. 1.26. Curbe de rezonanță ($b_1 < b_2 < b_3$).

Rezonanța este un proces selectiv de transfer de energie între doi oscilatori, care are loc dacă frecvența oscilațiilor forțate impuse de „excitator" este aproximativ egală cu frecvența oscilațiilor proprii ale „rezonatorului".

Creșterea amplitudinii la rezonanță este cu atât mai mare cu cât amortizarea produsă de mediu este mai mică.

1.6.3. Oscilatori cuplați

Fie un sistem mecanic E (pe care-l numim excitator) ce efectuează oscilații armonice de perioadă T și exercită o acțiune asupra unui alt oscilator R care are perioada proprie de oscilație T_0 (pe care-l numim rezonator). Experimental se constată că sistemul R are întodeauna o mișcare armonică cu perioada T pe care i-o impune excitatorul. Acțiunea mecanică executată de excitator asupra rezonatorului se numește **cuplaj**.

ACTIVITATE EXPERIMENTALĂ

Oscilatori cuplați: Rezonanța

Tema lucrării

Studiul a doi oscilatori mecanici cuplați. Rezonanța.

Materiale necesare

În experimentele următoare atât sistemul excitator (cel care cedează energie) cât și cel excitat (cel căruia i se cedează energie) vor fi pendule gravitaționale cuplate.

Modul de lucru

Experimentul 1

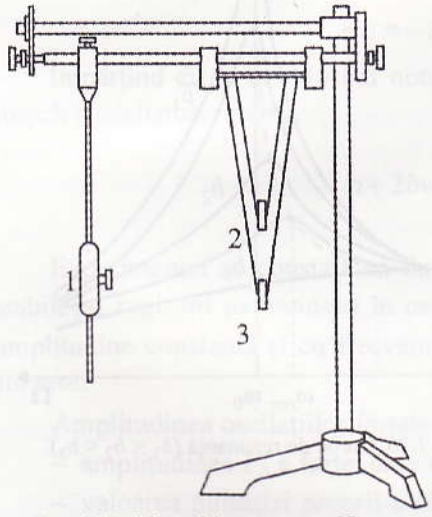


Fig. 1.27. Dispozitiv pentru verificarea condiției de rezonanță.

Calitativ, condiția apariției fenomenului de rezonanță se poate verifica cu dispozitivul din fig. 1.27. Pendulele 2 și 3 intră în oscilație fiind perturbate de oscilatorul 1, dar amplitudinea unuia dintre ele va crește foarte mult dacă discul excitatorului este prins aproximativ la aceeași înălțime cu discul pendulelor 2 sau 3.

Experimentul 2

Fie două pendule de aceeași lungime l și de aceeași masă, legate printr-un resort elastic (fig. 1.28). Scoatem **doar unul** din pendule din poziția de echilibru și îl lăsăm apoi liber să oscileze. Energia mișcării se va transmite, datorită cuplajului, și la celălalt pendul.

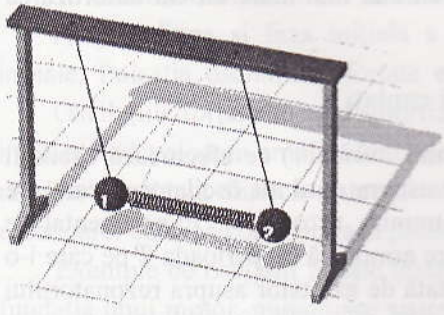


Fig. 1.28. Pendule simple cuplate.

Pe măsură ce amplitudinea oscilațiilor pendulului 1 scade spre zero, amplitudinea oscilațiilor pendulului 2 crește spre maximum, apoi procesul se desfășoară în sens invers. Energia cinetică trece succesiv de la un pendul la celălalt, ele fiind în rezonanță.

Observăm că, în cazul rezonanței, o oscilație se poate menține cu un minimum de energie. Dacă un oscilator urmează deci să oscileze neamortizat, energia i se transmite în ritmul frecvenței sale proprii.

1.7. CONSECINȚE ȘI APLICAȚII

1.7.1. Consecințele rezonanței

Atunci când un sistem mecanic care are o frecvență proprie de vibrație υ_0 este cuplat cu un alt sistem care oscilează cu frecvența $\upsilon \simeq \upsilon_0$, mișcarea se transferă de la un sistem la altul în regim de rezonanță. Putem întâlni acest fenomen, uneori, când mașina vibrează și trepidează la anumite viteze; atunci, oscilațiile ciclice ale motorului sau ale roților care trec peste denivelări sunt aproximativ de aceeași frecvență cu frecvența proprie a unei anumite părți a mașinii care va intra în vibrație de rezonanță.

Fenomenul de rezonanță trebuie să stea în atenția constructorilor de mașini și a constructorilor în general. De exemplu, dacă turația unui motor crește până când coincide cu frecvența proprie a sistemului în care este încastrat, atunci motorul se poate smulge din suport, care se fisurează.

Frecvența proprie a instalațiilor trebuie să fie cât mai diferită de frecvența unor perturbații eventual posibile.

În 1940, podul Tacoma Narrows din SUA s-a prăbușit; deși avea numai 10 luni de la darea în folosință, el s-a rupt în urma oscilațiilor extreme ale punții sale. Aceste oscilații au fost provocate de rafalele de vânt care interveneau cu o frecvență apropiată de frecvența proprie de oscilație a punții podului (fig. 1.29).

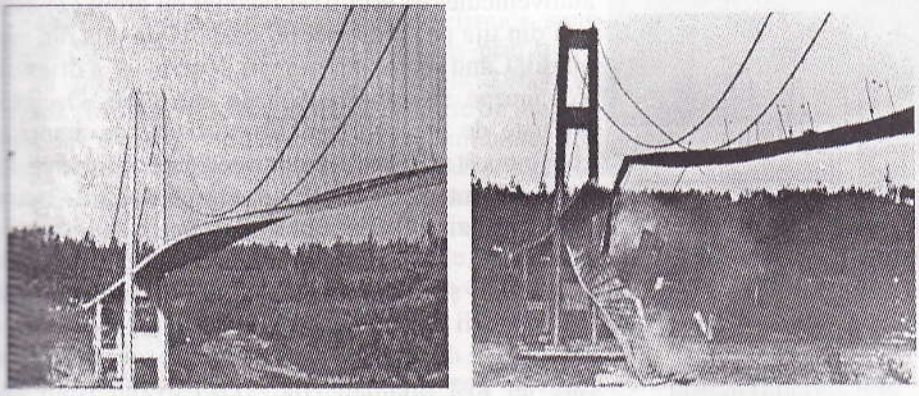


Fig. 1.29. Podul Tacoma Narrows

Pentru a evita pericolul ca un pod să intre în vibrație cu o frecvență apropiată de frecvența sa de rezonanță, atunci când trupe de militari traversează un pod, se interzice marșul cadențat și se merge „în pas de voie".

În timpul cutremurelor, vibrațiile solului fac clădirile să balanseze într-o parte și-n alta. Dacă frecvența mișcărilor pământului se potrivește cu frecvența proprie a clădirilor, atunci amplitudinea oscilațiilor clădirilor va crește progresiv până la prăbușire.

Clădirile foarte înalte au, și ele, frecvențe proprii de oscilație. Arhitecții trebuie să proiecteze aceste clădiri astfel încât frecvențele lor proprii să nu se potrivească cu frecvențele rafalelor de vânt.

1.7.2. Aplicații practice

Oscilațiile mecanice (vibrațiile) pot fi utile (în cazul aplicațiilor ultrasunetelor, al pendulei, al mașinilor pentru vibrarea betoanelor etc.) sau dăunătoare (vibrațiile produse de motoarele avioanelor, automobilelor, navelor, preselor, mașinilor-unelte sau concasoarelor etc.). Aceste vibrații se pot transmite la corpul navei, vehiculului sau la fundația clădirii și pot constitui un pericol atât pentru structura navei cât și pentru clădiri, și mai ales pentru oamenii care le folosesc, ceea ce impune studiul izolării sau eliminării vibrațiilor nedorite.

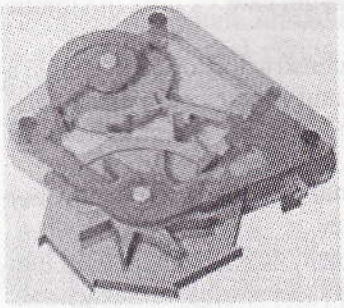


Fig. 1.30. Mecanismul ceasului

Din categoria oscilațiilor utile, ca aplicație amintim **mecanismul ceasului**: prin intermediul *ancorei*, *balansierul* transmite *roții regulatoare* energia mecanică înmagazinată sub formă de energie potențială în *arcul regulator* (fig. 1.30). Roata regulatoare pune în funcțiune mecanismul ceasului, într-un ritm corespunzător. Un sistem de roți dințate pune în mișcare limbile ceasului.

Din categoria dispozitivelor prin care se pot atenua vibrațiile cu amplitudini mari, evitându-se apariția fenomenului de rezonanță, amintim **amortizorul** (1) (fig. 1.31) utilizat în special la autovehicule. El este fixat coaxial cu arcul (2) având una din tije pe caroserie, iar cealaltă pe una din axele punții. Când roata întâlnește o denivelare a drumului, axa începe să oscileze față de caroserie. Oscilațiile preluate de arc sunt rapid amortizate de amortizor. Întrucât mișcarea acestuia este frântă de frecarea lichidului din interior, oscilația se stinge după 2–3 curse.

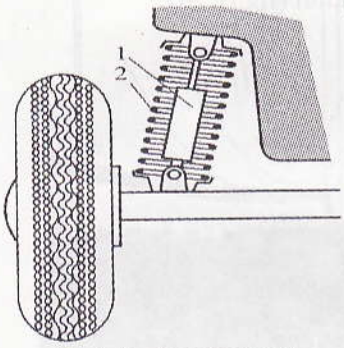


Fig. 1.31. Amortizor auto

Dispozitivele de amortizare pot fi folosite și în construcții. La Salonul Internațional al Invențiilor, Tehnicilor și Produselor Noi de la Geneva 2006, inventatorii români au propus un **sistem de dispozitive de amortizare a undelor seismice** pentru care au fost premiați (fig. 1.32) având rolul de a proteja construcțiile înalte de efectele distrugătoare ale cutremurelor. Un dispozitiv se compune dintr-un cilindru în interiorul căruia evoluează, într-un fluid sub presiune, două pistoane. Acestea, împreună cu un sistem de arcuri, preiau cea mai mare parte din energia distructivă eliberată de unda seismică; energia transmisă clădirii este anihilată în proporție de 75–80%, ca urmare a cursei de amortizare a dispozitivului de cca 10 cm. Centura „A" pe care se sprijină dispozitivele de amortizare se mișcă periodic, în timp ce corpurile dispozitivelor și centura „B" împreună cu clădirea rămân pe loc (fig. 1.32).

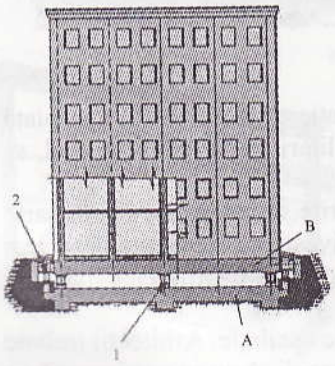


Fig. 1.32. Dispozitive de amortizare a undelor seismice: 1) verticale; 2) orizontale

Capitolul 2

UNDE MECANICE

2.1. PROPAGAREA UNEI PERTURBAȚII ÎNTR-UN MEDIU ELASTIC. TRANSFERUL DE ENERGIE

Unde

Să presupunem că aruncăm o pietricică într-un lac liniștit. Din punctul în care a căzut pietricica se formează o serie de cercuri care se răspândesc spre exterior (fig. 2.1). Spunem că pe suprafața apei s-a format o undă.

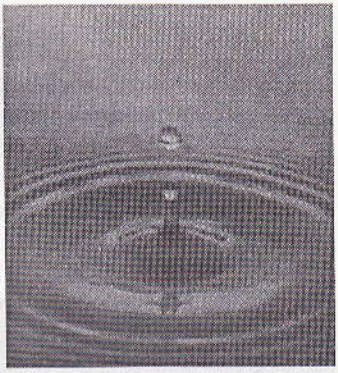


Fig. 2.1. Formarea undelor pe suprafața apei

Unda este fenomenul de propagare a unei perturbații din aproape în aproape, în timp, dintr-o regiune a spațiului în alta.

Valurile produse de vânt, undele seismice sunt exemple cunoscute. Sunetul este transmis prin unde care se propagă prin atmosferă de la sursă la ascultător. Multe dintre fenomenele produse de lumină se explică cu teoria ondulatorie. Undele luminoase au, de fapt, aceeași natură ca și undele radio, undele infraroșii, ultravioletele, razele X și razele gama.

Undele sunt prezente pretutindeni în mediul nostru înconjurător iar exemple de fenomene ondulatorii se găsesc în toate domeniile fizicii. Conceptul de undă reprezintă unul dintre cele mai importante elemente unificatoare din fizică.

Unde elastice

Mediilor continue (solide, lichide, gaze), datorită interacțiunii dintre particulele componente (molecule, atomi sau ioni) le este caracteristică nelocalizabilitatea oscilațiilor; dacă una dintre particule oscilează, vor oscila după ea și particulele vecine. Oscilațiile se vor propaga în mediu de la particulă la particulă sub formă de unde, numite unde elastice.

Într-o undă elastică particulele mediului se află în mișcare, deci posedă energie cinetică, iar mediul este deformat, deci posedă energie potențială, față de cazul în care unda este absentă.

Propagându-se în mediu, unda elastică pune în mișcare de oscilație noi și noi particule. Prin urmare, unda transportă energie.

Acest transport de energie nu este însoțit de un transport de substanță; particulele mediului nu se deplasează între punctele între care s-a propagat unda, ci efectuează doar oscilații cu o frecvență egală cu cea a sursei, fiind însă în întârziere față de aceasta.

Experiment

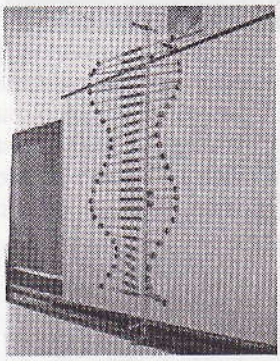


Fig. 2.2. Aparatul Weller

Folosiți aparatul Weller aflat în laboratorul școlar (fig. 2.2). Barele orizontale pot oscila în plan orizontal, forța d revenire provenind din răsucirea sistemului de fire vertical care cuplează toți oscilatorii. Acționând o singu „vertebră", provocați o undă în acest sistem și priv din lateral observați propagarea perturbației. Energia se transmite prin trecerea ei de la o „vertebră" la alta, nu prin deplasarea la distanță, pe verticală, a barelor orizontale.

Observați că transmiterea perturbației nu se face instantaneu ci este necesar un anumit interval de timp pentru ca perturbația produsă de sursă să se propage până într-un punct oarecare al mediului elastic.

Tipuri de unde elastice

Considerând modul în care mișcările particulelor de substanță sunt corelate cu direcția de propagare a undelor putem distinge mai multe tipuri de unde:

a) Dacă mișcările particulelor materiale care transmit unda sunt perpendiculare pe direcția de propagare a undei avem o undă transversală. De exemplu, la aparatul Weller (fig. 2.2) orice vertebră oscilează în plan orizontal, pe când propagarea perturbării se face pe verticală.

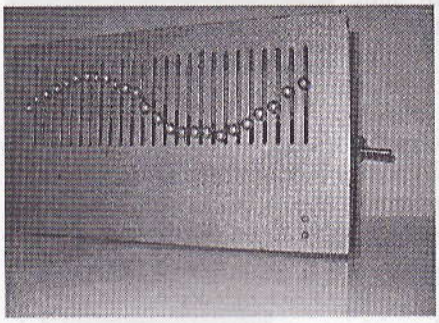


Fig. 2.3. Model de undă transversală

Un model de undă transversală este reprezentat de dispozitivul din figura 2.3. Oscilațiile se execută vertical dar propagarea se face pe orizontală.

Dacă scuturăm periodic sau lovim transversal capătul unei frânghii, al unui furtun de cauciuc sau al unui resort elastic prins de un corp (fig. 2.4, a) vom obține, de asemenea, unde transversale.

b) Dacă însă mișcarea particulelor care transportă o undă mecanică are loc înainte și înapoi de-a lungul direcției de propagare,

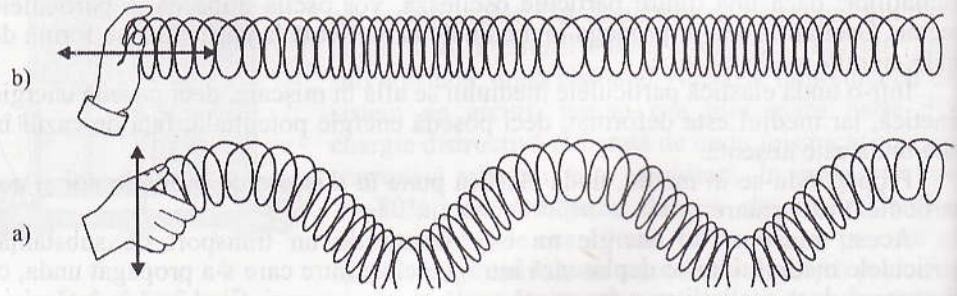


Fig. 2.4. Propagarea unei unde: a) transversal; b) longitudinal într-un resort elastic

atunci avem o undă longitudinală. De asemenea, dacă la capătul unui resort elastic aplicăm o perturbație pe aceeași direcție cu a resortului, se va propaga o undă longitudinală de-a lungul acestuia. Spirele vor vibra înainte și înapoi în direcția în care se propagă perturbația (fig. 2.4, b).

Alt exemplu de undă longitudinală: propagarea perturbației provocate de o lovitură dată cu ciocanul într-o bară metalică. Comprimarea barei prin lovitură este transmisă din aproape în aproape. Putem verifica acest lucru dacă la capătul opus celui la care se produce perturbația se pune o bilă alăturată de bara fixată rigid. Bila va fi proiectată pe direcția barei în sensul propagării perturbației.

Undele longitudinale se pot propaga atât în solide cât și în fluide (lichide și gaze), în timp ce undele transversale se pot propaga numai în medii elastice solide.

În fluide nu se pot propaga decât undele longitudinale, deoarece la lunecarea straturilor de fluid unele față de altele nu apar forțe elastice de revenire care să transmită oscilațiile transversale.

c) Unele unde nu sunt nici pur longitudinale nici pur transversale. De exemplu, în cazul undelor pe suprafața apei, particulele de apă se mișcă atât în sus cât și în jos, atât înainte cât și înapoi, descriind traiectorii eliptice.

Undele pot fi clasificate, de asemenea, în unde *uni-, bi- și tridimensionale*, după numărul de dimensiuni în care ele propagă energia.

Undele care se mișcă de-a lungul unei corzi sau unui resort sunt unidimensionale. Undele de suprafață produse prin căderea unei pietricele în lac sunt bidimensionale. Undele sonore emise radial de o sursă sunt tridimensionale.

Caracteristici ale undelor

Să considerăm o perturbație tridimensională.

Suprafețele ale căror puncte se află în aceeași fază a mișcării se numesc suprafețe de undă sau suprafețe de egală fază.

Dacă mediul este omogen și izotrop, direcția de propagare este întotdeauna perpendiculară pe suprafața de undă.

Linia perpendiculară pe suprafețele de undă, care indică direcția de propagare a undei se numește rază.

Suprafața de undă cea mai îndepărtată de sursă se numește front de undă.

Frontul de undă reprezintă o suprafață ce separă partea din spațiu cuprinsă deja de procesul ondulatoriu de acea parte din spațiu în care unda, până la acel moment de timp, nu a ajuns.

Dacă perturbațiile se propagă într-o singură direcție undele se numesc unde plane. Suprafețele de undă sunt plane și razele sunt linii drepte paralele (fig. 2.5, a).

Dacă sursa este punctiformă sau sferică, suprafețele de undă sunt sfere, iar razele sunt linii radiale care pleacă în toate direcțiile; acestea sunt unde sferice (fig. 2.5, b).

Departe de sursă, fronturile de undă sferice au o curbură foarte mică și pe regiuni limitate ele pot fi privite ca plane.

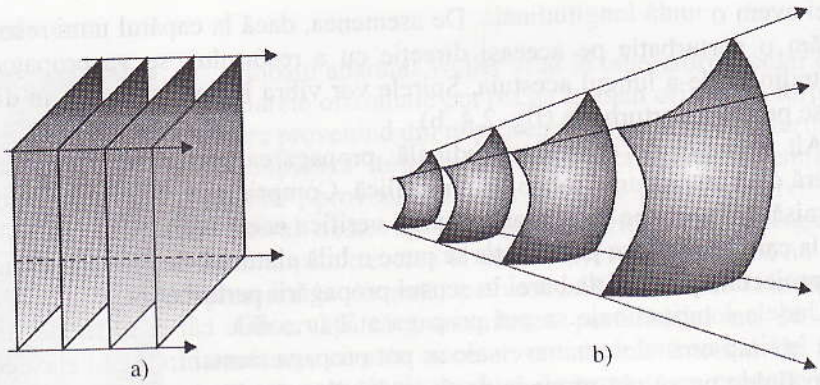


Fig. 2.5. a) undă plană; b) undă sferică

Distanța dintre două puncte consecutive de egală fază se numește lungime de undă și se notează cu λ.

În timp de o perioadă, T, unda parcurge distanța dintre două puncte de egală fază, adică λ.

Dacă v este viteza de propagare a frontului de undă, adică a fazei (se mai numește și viteză de fază) atunci

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\upsilon \tag{2.1}$$

unde υ este frecvența oscilațiilor punctelor din mediul de propagare a undei.

Viteza de propagare a undei

Propagarea undei nu se face instantaneu ci cu o viteză finită.

Trebuie să facem distincție între viteza de propagare a undei și viteza de oscilație a unei particule atinsă de undă.

Viteza de propagare a undelor în medii elastice depinde de proprietățile acestora.

Astfel, pentru undele transversale se poate demonstra că viteza de propagare este dată de relația:

$$v_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{2.2}$$

unde:

T este tensiunea la care este supusă coarda, $[T]_{SI} = N$;

μ este masa unității de lungime a corzii,

$$\mu = \frac{m}{l}, \quad [\mu]_{SI} = \text{kg/m}.$$

Viteza undelor longitudinale este dependentă de caracteristicile mediului conform relației

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{2.3}$$

unde:

E este modulul de elasticitate (modulul lui Young), $[E]_{SI} = N/m^2$;

ρ este densitatea mediului în care se propagă unda, $[\rho]_{SI} = kg/m^3$.

Iată viteza de propagare a undelor longitudinale (a sunetului) în câteva medii, la temperatura $t = 20°C$.

Substanța	Viteza sunetului (m/s)
aer	340
apă	1450
argint	2800
aluminiu	5240
oțel	5100
cupru	3600
lemn	3600–4000
sticlă	5000
granit	6000
cauciuc	54

Probleme rezolvate

1. Un capăt al unui tub de cauciuc este fixat de un suport. Celălalt capăt trece peste un scripete aflat la o distanță $l = 8$ m de capătul fixat și suportă o sarcină $m = 2$ kg. Masa tubului între capătul fix și scripete este $m_1 = 600$ g.

a) Care este viteza undelor transversale în tub?

b) Pentru ce frecvență a vibrațiilor lungimea de undă ar fi $\lambda = 40$ cm?

c) Cum se modifică viteza de propagare dacă se dublează masa corpului suspendat?

Rezolvare

a)

$$T = mg = 2\ \text{kg} \cdot 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 19{,}6\ \text{N}$$

$$\mu = \frac{m_1}{l} = \frac{0{,}60\ \text{kg}}{8\ \text{m}} = 0{,}075\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 16\ \text{m/s};$$

b)

$$\upsilon = \frac{v}{\lambda} = \frac{16\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}4\ \text{m}} = 40\ \text{Hz}.$$

c) Masa corpului suspendat fiind $m' = 2\ m$ viteza devine $v' = \sqrt{\frac{T'}{\mu}}$. Raportul vitezelor este:

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{T'}{T}} = \sqrt{\frac{m'}{m}} = \sqrt{2}.$$

2. O sârmă cu aria secțiunii transversale $S = 4{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{m}^2$ este confecționată dintr-un material cu densitatea $\rho = 7\,900\ \text{kg/m}^3$. Determinați:

a) masa unității de lungime;

b) tensiunea necesară pentru ca prin această sârmă să se propage unde cu viteza $v = 500$ m/s.

Rezolvare

a)

$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{\rho V}{l} = \rho S = 4{,}2 \cdot 10^{-7} \cdot 7900 = 3{,}318 \cdot 10^{-3}\ \text{kg/m}.$$

b)

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = \mu v^2 = 3{,}318 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^4 = 829{,}5\ \text{N}.$$

3. O conductă de oțel cu lungimea $l = 100$ m este lovită la unul din capete. O persoană aflată la celălalt capăt aude două sunete, ca rezultat a două unde longitudinale, una în conductă iar cealaltă în aer.

Dacă modulul lui Young pentru oțel este $E = 2 \cdot 10^{11}\ \text{N/m}^2$ iar densitatea oțelului $\rho = 7\,800\ \text{kg/m}^3$, care este intervalul de timp dintre cele două sunete? Viteza sunetului în aer este $c = 340$ m/s.

Rezolvare

$$t_{aer} = \frac{l}{c}$$

$$\left.\begin{aligned} t_{oțel} &= \frac{l}{v} \\ v &= \sqrt{\frac{E}{\rho}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow t_{oțel} = l\sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

$$\Delta t = t_{aer} - t_{oțel} = l\left(\frac{1}{c} - \sqrt{\frac{\rho}{E}}\right) = 0{,}27\ \text{s}.$$

Nota Do centrală a pianului corespunde unei frecvențe $\upsilon = 262$ Hz.

a) Aflați lungimea de undă a undei sonore corespunzătoare din aer, la C ($v = 340$ m/s).

b) Care este lungimea ei de undă în apă la 20°C dacă viteza undei este 1450 m/s.

Rezolvare

$$\lambda = v \cdot T = \frac{v}{\upsilon}$$

a)

$$\lambda = \frac{v}{\upsilon} = \frac{340\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{262\ \text{Hz}} = 1{,}30\ \text{m}.$$

b)

$$\lambda' = \frac{v_a}{\upsilon} = \frac{1450\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{262\ \text{Hz}} = 5{,}53\ \text{m}.$$

Observăm că la trecerea unei unde dintr-un mediu în altul, odată cu schimbarea ei de propagare, se schimbă și lungimea de undă. Frecvența nu se schimbă, ine egală cu frecvența de oscilație a sursei.

Răspundeți cu A sau F după cum afirmația este adevărată, respectiv falsă:

F Undele transportă energie.

F Pe timpul propagării undei, are loc transport de masă dintr-o regiune a spațiului în alta.

F Undele se propagă întotdeauna instantaneu, indiferent de distanță.

F Într-o undă longitudinală particulele oscilează după o direcție perpendiculară pe direcția de propagare.

F Sunetul este o undă longitudinală.

F Undele transversale se propagă numai în medii solide.

F La trecerea unei unde prin diverse medii, frecvența se păstrează dar se schimbă lungimea de undă.

F Undele longitudinale se propagă numai în medii solide.

Probleme propuse

1. O undă produsă într-un mediu elastic străbate distanța de 8 800 m în 4 s. Știind că lungimea ei de undă este $\lambda = 22$ m, să se calculeze:

a) viteza de propagare;

b) perioada;

c) frecvența ei.

R: a) $v = 2200\frac{\text{m}}{\text{s}}$; b) $T = \frac{1}{100}$ s; c) $\upsilon = 100$ Hz.

2. Un fir de oțel cu lungimea de 6 m are masa 60 g și este supus unei tensiuni de 1000 N. Care este viteza de propagare în fir a undei transversale?

R: $v = 316$ m/s.

3. Un capăt al unei coarde orizontale este atașat unui diapazon acționat electric, a cărui frecvență de vibrație este de 240 Hz. Celălalt capăt trece peste un scripete și suportă un corp cu masa 5 kg. Masa unității de lungime a coardei este 0,02 kg/m.

a) Care este viteza unei unde transversale în această coardă?

b) Care este lungimea de undă?

R: a) $v = 49{,}5$ m/s; b) $\lambda = 20{,}6$ cm.

4. Unui capăt al unei frânghii întinse i se imprimă o mișcare transversală cu frecvența de 10 Hz. Frânghia are o lungime de 50 m, o masă totală de 0,5 kg și este supusă unei tensiuni de 400 N.

a) Aflați viteza undei și lungimea de undă.

b) Dacă se dublează tensiunea, cum trebuie schimbată frecvența pentru ca lungimea de undă să rămână aceeași?

R: a) 200 m/s; 20 m; b) crește de $\sqrt{2}$ ori.

5. De capătul unui braț de diapazon așezat vertical cu ramurile în jos se leagă un fir cu lungimea $l = 2$ m și masa $m = 12$ g. De fir se atârnă un corp cu masa $M = 960$ g. Ce frecvență corespunde lungimii de undă $\lambda = 5$ cm a undelor transversale care se propagă prin fir?

R: $\upsilon = 800$ Hz.

6. Un capăt al unui tub de cauciuc lung de 20 m, cu masa 1 kg este legat de un suport fix. O coardă prinsă de celălalt capăt trece peste un scripete și suportă un corp cu masa de 10 kg. Tubul suferă o lovitură transversală la unul din capete. Aflați timpul necesar pentru ca pulsul să ajungă la celălalt capăt.

R: $t = 0{,}45$ s.

7. Într-un mediu elastic cu modulul de elasticitate $E = 6768{,}9 \cdot 10^7$ N/m^2 și densitatea $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3$ kg/m^3, se propagă vibrații cu frecvența $\upsilon = 50$ Hz. Calculați lungimea de undă a perturbațiilor propagate.

R: $\lambda = 100{,}14$ m.

8. Un muncitor de la calea ferată loveşte cu ciocanul capătul unei şine producând o undă longitudinală. Sunetul este auzit după 0,2 s de un al doilea muncitor care ascultă cu urechea pe şină. Ce distanţă este între cei doi muncitori dacă şina este din oţel cu $\rho = 7800\ kg/m^2$ şi $E = 2 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$?

R: $d = 1\ 012$ m.

9. Urechea omului este sensibilă la undele longitudinale din domeniul de frecvenţe cuprins aproximativ între 20 Hz şi 20 000 Hz. Calculaţi lungimile de undă corespunzătoare acestor frecvenţe:

a) în aer ($c = 340$ m/s);

b) în apă (viteza sunetului în apă este 1 450 m/s).

10. Un fragment de metal este analizat măsurând viteza sunetului într-o bară făcută din acest metal. Bara are masa 30 kg şi volumul $2 \cdot 10^{-3}\ m^3$. Viteza sunetului în bară este 4 000 m/s. Calculaţi modulul de elasticitate.

R: $E = 24 \cdot 10^{10}\ N/m^2$.

11. Care este distanţa dintre două regiuni rarefiate succesive într-o undă sonoră cu frecvenţa $\upsilon = 120$ Hz a cărei viteză este 360 m/s.

R: $d = \lambda = 3$ m.

2.2. ECUAŢIA UNDEI PLANE

La undele plane suprafeţele de undă reprezintă un sistem de plane paralele, iar la undele sferice suprafeţele de undă reprezintă un sistem de sfere concentrice.

Dacă la undele plane numărul de oscilatori de pe frontul de undă rămâne acelaşi în timpul propagării undei, în cazul undelor sferice, odată cu creşterea suprafeţelor de undă numărul de oscilatori de pe frontul de undă creşte în timp.

De aceea, energia transmisă fiecărui oscilator, deci şi amplitudinea de oscilaţie:

– este aceeaşi pentru toate punctele la care ajunge frontul de undă în cazul undelor plane;

– scade pe măsură ce unda se propagă în cazul undei sferice.

Considerăm o undă plană care se propagă într-un mediu omogen şi nedisipativ, amplitudinea de oscilaţie a tuturor punctelor din mediul elastic fiind aceeaşi.

Toate particulele situate într-un plan perpendicular pe direcţia de propagare a undei oscilează identic în unda plană.

De aceea este suficient să urmărim ce se întâmplă doar de-a lungul unei raze de undă Ox.

Dacă unda se propagă fără atenuare în direcţia axei Ox cu viteza constantă v pornind de la sursa plasată în O a cărei lege de mişcare este:

$$y_s = A \sin \omega t,$$

atunci într-un punct oarecare P, situat pe Ox la distanţa x de sursă, oscilaţiile vor ajunge după timpul τ în care au parcurs această distanţă, adică

$$\tau = \frac{x}{v}.$$

Punctul P va începe să oscileze cu o întârziere τ față de sursă. Deci, la momentul t, punctul P are aceeași elongație pe care o avea sursa la momentul $(t-\tau)$, adică:

$$y = A\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right).$$

Înlocuind $\omega = 2\pi\upsilon$ și $v = \frac{\lambda}{T}$ rezultă:

$$y(x,t) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right). \quad (2.4)$$

Această ecuație descrie mișcarea tuturor punctelor din mediu până la care a ajuns frontul de undă. Ea este ecuația undei plane.

Elongațiile particulelor, măsurate de la poziția lor de echilibru x, pot fi atât în direcția de propagare a undei (undă longitudinală) cât și într-o direcție perpendiculară pe direcția de propagare (undă transversală).

Observăm că:

- expresia care indică legea deplasării punctului material de la poziția lui de echilibru are o dublă dependență: spațială, prin x și temporală, prin t;
- propagarea unei unde depinde de mediu, prin viteza cu care se deplasează unda în mediul respectiv;
- propagarea unei unde depinde de sursă, prin frecvența de oscilație a acesteia.

Dubla periodicitate a undei

Se poate arăta că unda plană este un fenomen cu dublă periodicitate. Funcția $y(x, t)$ este periodică în timp cu perioada T și în spațiu cu „perioada" egală cu lungimea de undă λ.

Astfel, dacă n este un număr întreg, păstrând x constant și înlocuind t cu $(t + nT)$, din ecuația undei plane rezultă:

$$y(t+nT,x) = A\sin 2\pi\left(\frac{t+nT}{\lambda}-\frac{x}{\lambda}\right) =$$

$$= A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+n-\frac{x}{\lambda}\right) =$$

$$= A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+2n\pi\right] = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) = y(t,x).$$

Procedând analog, păstrăm t constant și înlocuind x cu $(x + n\lambda)$, rezultă:

$$y(x+n\lambda,t) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x+n\lambda}{\lambda}\right) =$$

$$= A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - n\right) = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - 2\pi n\right] =$$

$$= A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = y(x, t).$$

Aşadar unda plană prezintă atât periodicitate temporală (cu perioada T) cât şi periodicitate spaţială (cu „perioada" λ).

Defazajul dintre doi oscilatori

Considerăm doi oscilatori aflaţi la distanţa x_1 respectiv x_2 de sursa de oscilaţie, pe aceeaşi rază de undă, la acelaşi moment. Elongaţiile lor sunt:

$$y_1 = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) \text{şi}$$

$$y_2 = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right).$$

Atunci defazajul dintre ei este:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2).$$

Deci:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x. \tag{2.5}$$

Observaţii:

1. Dacă Δx, diferenţa de drum dintre cei doi oscilatori, este un multiplu par de $\lambda/2$ atunci defazajul este:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2k\frac{\lambda}{2} = 2k\pi$$

adică oscilatorii sunt *în fază* deoarece $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$.

2. Dacă diferenţa de drum dintre cei doi oscilatori este multiplu impar de $\lambda/2$, atunci defazajul este

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (2k+1)\frac{\lambda}{2} = (2k+1)\pi$$

şi cei doi oscilatori sunt *în opoziţie de fază* deoarece $\sin[\alpha + (2k+1)\pi] = -\sin\alpha$.

Probleme rezolvate

1. Punctele unui mediu în care s-au format unde execută mişcări periodice descrise de legea:

$$y = 2 \cdot 10^{-3} \sin (120\,\pi t - 0{,}25 = x)$$

Aflaţi:

a) frecvenţa oscilaţiilor punctelor mediului;
b) viteza maximă a oscilaţiilor punctelor mediului;
c) lungimea de undă;
d) viteza de propagare a undei;
e) la ce distanţă se află două puncte ale căror oscilaţii sunt defazate cu $\pi/6$ rad?

Rezolvare

a) Prin identificarea expresiei date cu ecuaţia undei plane, rezultă:

$$\omega = 120\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

deci

$$\upsilon = \frac{\omega}{2\pi} = 60 \text{ Hz}.$$

b)

$$\upsilon_{max} = \omega A = 120\pi \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 24\pi 10^{-2} = 0{,}75 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Tot din ecuaţia undei plane rezultă:

$$0{,}25x = \frac{2\pi x}{\lambda}, \text{ de unde } \lambda = \frac{2\pi}{0{,}25} = 8\pi \text{ m}.$$

d) Viteza de propagare a undei este

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\upsilon = 8\pi \cdot 60 = 480\pi = 1\,507 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

e) Din expresia defazajului între doi oscilatori de pe direcţia de propagare a undei:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \text{ rezultă } \frac{\pi}{6} = 2\pi \frac{\Delta x}{8\pi},$$

deci

$$\Delta x = \frac{2\pi}{3} = 2{,}09 \text{ m}.$$

2. Capetele unei bare de aluminiu AB oscilează după ecuaţiile $y_A = 10 \cdot 10^{-3}$ sin 2 520πt şi $y_B = 20 \cdot 10^{-3}$ sin 2 520πt. Oscilaţiile se propagă prin bară sub formă

de unde longitudinale. Se cunosc pentru aluminiu: densitatea $\rho = 2\,700\ \text{kg/m}^3$ şi modulul de elasticitate $E = 6{,}86 \cdot 10^{10}\,\frac{N}{m^2}$. Se cer:

a) perioada şi frecvenţa oscilaţiilor;
b) viteza undei longitudinale prin bară;
c) lungimea barei ştiind că într-un punct C al barei sosesc undele plane date de ecuaţiile $y_1 = 10 \cdot 10^{-3} \sin\left(2\,520\,\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ şi $y_2 = 20 \cdot 10^{-3} \sin\left(2\,520\,\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$

Rezolvare

a)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\,520\pi} = 0{,}79 \cdot 10^{-3}\text{s}$$

$$\upsilon = \frac{2\,520}{2} = 1\,260\ \text{Hz}.$$

b)

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{6{,}86 \cdot 10^{-10}}{2{,}7 \cdot 10^{3}}} = 5\,050\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Se identifică ecuaţia oscilaţiilor care vin de la sursa A

$$y_1 = 10 \cdot 10^{-3} \sin\left(2\,520\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

cu ecuaţia undei plane la distanţa $AC = x_1$:

$$y_1 = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right)$$

şi rezultă:

$$\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi x_1}{\lambda} \text{ adică } x_1 = \frac{\lambda}{6}.$$

Analog pentru oscilaţiile care s-au propagat din B în C

$$y_2 = 20 \cdot 10^{-3} \sin\left(2\,520\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$$

se identifică cu ecuaţia undei plane la distanţa $BC = x_2$:

$$y_2 = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_2}{\lambda}\right)$$

şi rezultă

$$\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi x_2}{\lambda} \text{ adică } x_2 = \frac{\lambda}{12}.$$

Lungimea barei este:

$$L = AC + CB = x_1 + x_2 = \frac{\lambda}{6} + \frac{\lambda}{12} = \frac{\lambda}{4}.$$

Dar,

$$\lambda = v \cdot T = 5\,050 \frac{m}{s} \cdot 0{,}79 \cdot 10^{-3} s = 3{,}99 \text{ m} \cong 4 \text{ m}.$$

Deci,

$$L = \frac{\lambda}{4} = 1 \text{ m}.$$

3. Extremitatea A a unei coarde elastice lungi este pusă într-o mişcare oscilatorie de forma $y = 4 \sin 20\pi t$ (cm).

a) Să se determine amplitudinea, perioada şi frecvenţa mişcării oscilatorii. Mişcarea se propagă în lungul corzii cu viteza $v = 2{,}5$ m/s.

b) Să se determine lungimea de undă a perturbaţiei. Care este ecuaţia mişcării unui punct M situat la $x = 62{,}5$ cm de extremitatea A?

c) Să se calculeze, în grade, diferenţa de fază corespunzătoare punctelor M şi N separate prin distanţa $\Delta x = 40$ cm, aflate pe aceeaşi direcţie de propagare a perturbaţiei.

Rezolvare

Din ecuaţia oscilaţiilor sursei
$y = 4 \sin 20\pi t$ (cm) rezultă:

a) $A = 4 \cdot 10^{-2}$ m

Întrucât

$$\omega = 20\pi \frac{rad}{s} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}1 \text{ s}$$

$$\upsilon = \frac{1}{T} = 10 \text{ Hz}.$$

b) Se cunoaşte $v = 2{,}5 \frac{m}{s}$ şi aplicăm relaţia între λ şi T.

$$\lambda = v \cdot T = 0{,}25 \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

Ecuaţia punctului M situat la $x = 62{,}5$ cm de sursă este:

$$y = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 4 \cdot 10^{-2} \sin 2\pi\left(10t - \frac{62{,}5 \text{ cm}}{25 \text{ cm}}\right) =$$

$$= 4 \cdot 10^{-2} \sin 2\pi(10t - 2{,}5) = 4 \cdot 10^{-2} \sin (20\pi t - 5\pi);$$

c)

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}$$

$$\Delta\varphi = 2\pi\cdot\frac{40\cdot10^{-2}}{25\cdot10^{-2}} = \frac{16}{5}\pi \text{ rad}$$

$$\pi \text{ rad} \ldots\ldots 180^\circ$$

$$\frac{16}{5}\pi \text{ rad} \ldots\ldots \Delta\varphi$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = \frac{16}{5}\cdot 180^\circ = 576^\circ = 216^\circ.$$

Probleme propuse

1. O undă sonoră plană este descrisă de următoarea lege:

$$y = 0{,}05 \sin (1980t - 6x) \text{ (cm)}.$$

Aflați:

a) frecvența oscilațiilor;

b) lungimea de undă;

c) viteza de propagare a undei;

d) viteza maximă de oscilație a particulelor.

R: a) 315 Hz; b) $\lambda = 1{,}04$ m; c) $v = 330$ m/s; d) $v_{max} = 99$ cm/s.

2. Oscilații longitudinale cu frecvența $\nu = 500$ Hz se transmit într-un mediu elastic al cărui modul de elasticitate este $E = 4{,}32 \cdot 10^{10}$ N/m^2 și care are densitatea $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3$ kg/m^3.

Să se determine:

a) viteza de propagare a undei;

b) lungimea de undă:

c) distanța dintre două puncte ale mediului între care diferența de fază este $\Delta\varphi = \pi$ rad.

R: a) $v = 4\cdot10\frac{3\text{ m}}{\text{s}}$; b) $\lambda = 8$ m; c) $\Delta x = 4$ m.

3. O undă transversală se propagă în lungul unui cablu elastic cu viteza $v = 15$ m/s. Perioada vibrațiilor cablului este $T = 1{,}2$ s.

Să se calculeze:

a) lungimea de undă λ;

b) faza φ pentru un punct al cablului aflat la distanța $x = 45$ m de sursa de oscilație la momentul $t = 4$ s;

c) diferența de fază $\Delta\varphi$ a două puncte de pe cablu aflate la distanța $x_1 = 20$ m și respectiv $x_2 = 24{,}5$ m de sursa de unde.

R: a) $\lambda = 18$ m; b) $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 1{,}67\pi \cong 300^\circ$; c) $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad.

4. O sursă de oscilații aflată într-un mediu elastic emite unde plane de forma $y = 0{,}25 \sin 100\pi t$ (mm). Lungimea de undă a undelor longitudinale care se formează în acest mediu este $\lambda = 10$ m.

a) După cât timp va începe să oscileze un punct situat la distanța $x_1 = 8$ m față de sursă?

b) Ce defazaj există între oscilațiile punctului aflat la distanța x_1 de sursă și ale sursei?

c) La ce distanță sunt situate două puncte ale căror oscilații sunt defazate cu $\frac{\pi}{3}$ rad?

d) Evaluați defazajul dintre două puncte situate la distanța $d = \frac{\lambda}{2}$.

R: a) $t_1 = 16$ ms; b) $\varphi_1 = \frac{8\pi}{5}$ rad; c) $\Delta x = 1{,}66$ m; d) $\Delta\varphi = \pi$ rad.

5. Capetele A și B ale unei bare oscilează conform ecuațiilor $y_A = 0{,}01 \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ și $y_B = 0{,}02 \sin 100\pi t$. Oscilațiile se propagă prin bară sub forma unor unde longitudinale. Într-un punct C al barei sosesc undele plane având ecuațiile: $y_1 = 0{,}01 \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ și $y_2 = 0{,}02 \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$.

Materialul barei are densitatea $\rho = 8000$ kg/m^3 și modulul de elasticitate $E = 9{,}248 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2}$. Să se calculeze lungimea barei.

R: $l = 17$ m.

6. Care este modulul de elasticitate E al unei bare metalice cu densitatea $\rho = 8000$ kg/m^3 dacă în ea se propagă unda plană longitudinală $y = 4 \cdot 10^{-2} \sin 2\pi(1000t - 0{,}5x)$.

R: $E = 3{,}2 \cdot 10^{10}$ N/m^2.

2.3. REFLEXIA ȘI REFRACȚIA UNDELOR MECANICE

2.3.1. Principiul lui Huygens

Cristian Huygens (1629–1695)

Fizicianul și astronomul olandez Cristian Huygens (1629–1695) a formulat în al său „Tratat despre lumină" (1690) un principiu care acum îi poartă numele, valabil pentru propagarea undelor elastice.

Enunț: Orice punct de pe o suprafață de undă poate fi considerat ca un nou centru de oscilație de la care se propagă înainte unde sferice secundare. Înfășurătoarea fronturilor undelor secundare constituie noul front de undă.

Acest principiu oferă o metodă de construire a suprafețelor de undă. În figura 2.6 este dată construcția fronturilor de undă pentru unda plană și respectiv sferică prin aplicarea principiului lui Huygens câtorva puncte ale frontului de undă.

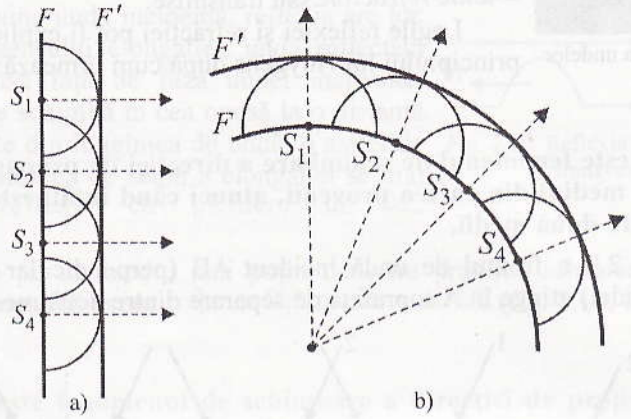


Fig. 2.6. Construirea fronturilor de undă pentru unde plane (a) și unde sferice (b)

Principiul lui Huyens este ilustrat cu experimentul prezentat în figura 2.7: o cuvă cu apă pentru studiul undelor este împărțită în două printr-un perete având un orificiu de dimensiuni mici în raport cu lungimea de undă. În jumătatea din stânga (fig. 2.7) se produc unde de suprafață, unde circulare, care se propagă până la peretele despărțitor. Se observă că și în cea de a doua jumătate a cuvei apar unde circulare, care au însă centrul în orificiul din paravanul despărțitor, ca și cum acolo ar fi plasată o sursă de oscilații de aceeași frecvență cu sursa primară.

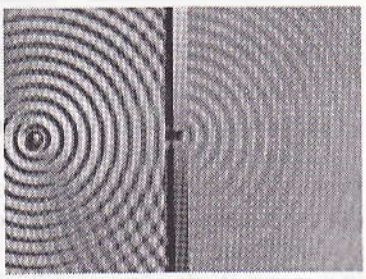


Fig. 2.7. Un punct de pe o suprafață de undă propagă unde identice cu cele produse de sursa primară

2.3.2. Reflexia și refracția undelor

Când undele care se propagă într-un mediu ajung la o suprafață care-l separă de un alt mediu, are loc un fenomen de schimbare a direcției de propagare și anume:

– întoarcerea în primul mediu (reflexia undelor);

– trecerea în cel de-al doilea mediu cu schimbarea direcției de propagare (refracția undelor).

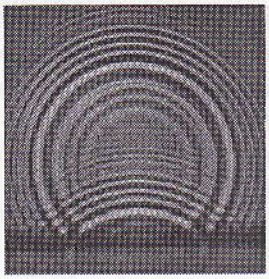


Fig. 2.8. Reflexia undelor

Un exemplu de reflexie întâlnim în cazul undelor produse pe suprafața unui lac: se observă că, după ce acestea ating malul, apar unde care se propagă de la mal spre mijlocul lacului (fig. 2.8).

Undele care se îndreaptă spre suprafața de separare a celor două medii se numesc *unde incidente*, cele care se întorc – *unde reflectate*, iar cele care trec în al doilea mediu – *unde refractate* sau transmise.

Legile reflexiei și refracției pot fi explicate cu ajutorul principiului lui Huygens după cum urmează:

Reflexia

Reflexia este fenomenul de schimbare a direcției de propagare a undei și întoarcere în mediul din care a provenit, atunci când întâlnește suprafața de separare dintre două medii.

În figura 2.9, a frontul de undă incident AB (perpendicular pe direcția de propagare a undei) atinge în A suprafața de separare dintre două medii:

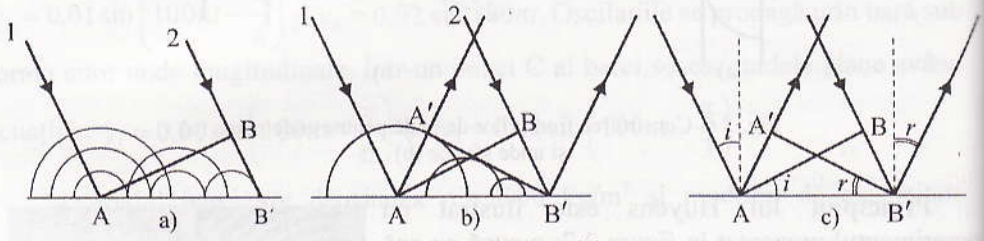


Fig. 2.9. Reflexia undelor

Când raza 1 a atins suprafața de separare, punctul A a devenit sursă de oscilație de la care se propagă unde secundare.

Toate punctele dintre A și B′ devin, succesiv, pe măsură ce sunt atinse de undă, surse secundare de unde. Înfășurătoarea fronturilor undelor secundare la un moment dat constituie, conform principiului lui Huygens, noul front de undă.

În figura 2.9, b, noul front de undă în momentul atingerii suprafeței de separare în punctul B′ de către raza 2, este A′B′. Acesta constituie **frontul undei reflectate**.

Pentru raționamente geometrice urmărim figura 2.9, c. Se observă că $\Delta AA'B' = \Delta AB'B$ deoarece:

– sunt dreptunghice (frontul de undă este întotdeauna perpendicular pe direcția de propagare a undei)

– au AB′ = comună

– $AA' = BB' = v\Delta t$

unde v este viteza de propagare a undei în mediul dat și Δt este timpul în care unda incidentă a ajuns din B în B′, iar unda reflectată a ajuns din A în A′.

Din egalitatea triunghiurilor rezultă

$$\sphericalangle BAB' = \sphericalangle A'B'A$$

deci

$$i = r \qquad (2.6)$$

Această egalitate constituie legea reflexiei undelor:

La reflexie, unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie.

În funcție de raportul dintre densitatea mediului în care se propagă unda și cea a mediului pe care se reflectă, fenomenul de reflexie poate avea loc în două moduri. Astfel:

a) dacă mediul reflectant este mai dens decât mediul din care provine unda incidentă, reflexia are loc cu schimbarea sensului elongației, unda reflectată având fază opusă față de faza undei incidente. Deoarece faza se schimbă în cea opusă la o distanță egală cu jumătate din lungimea de undă, o astfel de reflexie cu schimbarea de semn a elongației se mai numește și reflexie cu pierdere de $\lambda/2$ (fig. 2.10, a).

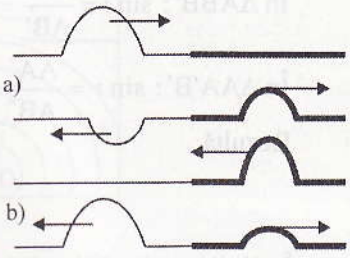


Fig. 2.10. Reflexia unei perturbații transversale

b) Reflexia pe un mediu mai puțin dens nu produce schimbarea sensului elongației și spunem că avem reflexie fără pierdere de $\lambda/2$ (fig. 2.10, b).

Refracția

Refracția este fenomenul de schimbare a direcției de propagare a unei unde la trecerea dintr-un mediu în altul.

În figura 2.11 frontul de undă incident AB (perpendicular pe direcția de propagare a undei) atinge, în A, suprafața de separare dintre mediul ① și mediul ②. Din A încep să se propage, conform principiului lui Huygens, unde secundare. Succesiv, toate punctele dintre A și B′, pe măsură ce sunt atinse de unda incidentă,

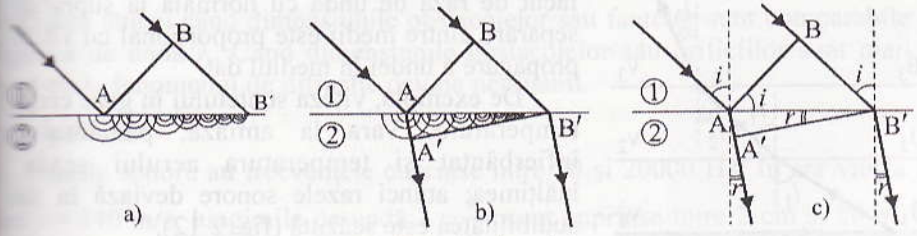


Fig. 2.11. Refracția undelor

intră în oscilație și devin surse de unde secundare.

Înfășurătoarea fronturilor undelor secundare la momentul când unda incidentă atinge punctul B′ va constitui frontul undei refractate A′B′. În fig. 2.11, b observăm că, întrucât segmentele AA′ și BB′ sunt parcurse în același interval de timp dar cu viteze diferite, ele nu mai sunt egale. Dacă în mediul ① unda se propagă cu viteza v_1, iar în mediul ② se propagă cu viteza v_2, atunci

$$AA' = v_2 \cdot \Delta t$$
$$BB' = v_1 \cdot \Delta t$$

2.5. INTERFERENȚA UNDELOR MECANICE

2.5.1. Condiția de coerență

De multe ori într-un mediu se propagă unde provenite de la două sau mai multe surse. Punctele mediului, fiind solicitate de mai multe vibrații, vor avea o mișcare care va fi rezultanta mișcărilor pe care le-ar executa dacă ar fi supuse, pe rând, separat, fiecărei unde.

Fenomenul de suprapunere a două sau mai multe unde în același mediu poartă numele de interferență.

Interes deosebit îl prezintă cazul a două surse care oscilează cu aceeași frecvență și care au diferența de fază o oscilațiilor constantă. Astfel de surse se numesc surse coerente. Tabloul de interferență, în acest caz, este staționar: amplitudinile oscilațiilor în diferite puncte sunt constante în timp.

Un mod de a obține surse coerente este următorul:

Experiment

Materiale necesare

Cuva cu apă pentru studiul undelor, lamă vibrantă acționată de un motor electric, două vârfuri conice.

Modul de lucru

– se fixează vârfurile conice pe lama vibrantă;

– vârfurile trebuie doar să atingă suprafața apei din cuvă; ele vor constitui, la pornirea motorașului care pune lama în vibrație, surse de aceeași frecvență care oscilează în fază (deci surse coerente).

Constatări

Fig. 2.14. Interferența a două unde

În lumina naturală se observă între surse o serie de zone imobile alternativ luminoase și întunecoase. Aceste zone se numesc franje de interferență; cele luminoase sunt franje de amplitudine maximă iar cele întunecate sunt franje de amplitudine minimă.

În lumina stroboscopică, imaginea de interferență arată ca în figura 2.14.

2.5.2. Explicarea formării maximelor și minimelor de interferență

Considerăm un punct oarecare P din câmpul de interferență. La el ajung oscilațiile produse de sursele coerente S_1 și S_2 (fig. 2.15) după ce au parcurs fiecare distanțele x_1 și respectiv x_2. Elongațiile mișcării oscilatorii imprimate punctului P vor fi, conform ecuației undelor plane:

$$y_1 = A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = A_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right).$$

Diferența de fază între oscilațiile care se compun în punctul P este:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda}. \qquad (2.9)$$

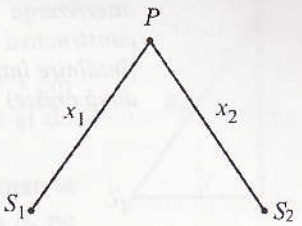


Fig. 2.15. Perturbațiile produse de sursele S_1 și S_2 ajung într-un punct arbitrar P după ce au parcurs distanțele x_1 respectiv x_2

Conform calculului de la compunerea oscilațiilor paralele de aceeași frecvență (paragraful 1.4.1.), amplitudinea rezultantă va fi:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda}}. \qquad (2.10)$$

Mărimea amplitudinii rezultante în punctul P depinde de diferența de drum $\Delta x = x_2 - x_1$ a celor două oscilații care se suprapun. Astfel:

a) Amplitudinea rezultantă va avea valoarea maximă $A = A_1 + A_2$ în cazul în care $\Delta\varphi = 2k\pi$ sau

$$2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = 2k\pi$$

adică

$$x_2 - x_1 = 2k\frac{\lambda}{2} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (2.11)$$

Deci amplitudinea rezultantă va fi maximă în punctele pentru care diferența de drum este egală cu zero sau cu un număr par de semilungimi de undă (număr întreg de λ).

b) Amplitudinea rezultantă va avea valoare minimă $A = |A_1 - A_2|$ în cazul în care $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$ sau

$$2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = (2k\pi + 1)\pi$$

adică

$$x_2 - x_1 = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (2.12)$$

Așadar **amplitudinea rezultantă va fi minimă în punctele pentru care diferența de drum este egală cu un număr impar de semilungimi de undă.**

Dacă amplitudinile componente sunt egale, mișcarea acestor puncte încetează, undele se „sting" reciproc, interferența având un caracter destructiv.

Observăm că locurile geometrice ale punctelor din câmpul de interferență care au aceeași valoare a amplitudinii sunt date de relația

$$x_2 - x_1 = \text{constant}.$$

Punctele pentru care diferența distanțelor la două puncte fixe este constantă se află pe o hiperbolă. De aceea vorbim de hiperbole de interferență.

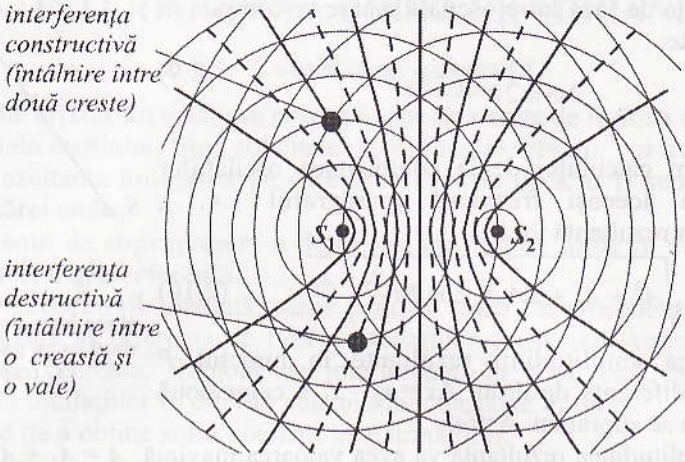


Fig. 2.16. Franje de interferență. Liniile pline arată locurile unde creste provenite de la sursa S_1 întâlnesc creste de la S_2, cu obținerea de creste duble (interferență constructivă)

În concluzie, la suprapunerea a două sisteme de unde circulare produse de doi excitatori care oscilează cu aceeași frecvență și cu aceeași fază, figura de interferență constă dintr-o serie de hiperbole de interferență pe care se află puncte cu amplificare maximă și puncte cu extincție totală.

Fig. 2.17. Interferența undelor coerente dă o imagine de interferență stabilă

În figura 2.16 este desenat tabloul de interferență produs de două surse punctiforme S_1 și S_2. Observăm simetria hiperbolelor. Diagrama arată clar locurile unde o vale de undă se întâlnește cu o creastă de undă producând interferență destructivă. În acele puncte apa (mediul) nu se deplasează. Se observă totodată că franja centrală (mediană) dintre cele două surse este una de amplitudine maximă deoarece, de-a lungul axei de simetrie a celor două surse, diferența de drum este nulă.

La interferența undelor coerente pozițiile franjelor nu se modifică, observându-se o figură de interferență stabilă (fig. 2.17).

Fenomenul de interferență este frumos ilustrat de undele de suprafață care se formează pe apă la aruncarea simultană a două pietricele la o anumită distanță între ele, sau la căderea picăturilor de ploaie (fig. 2.18).

Fig. 2.18. Unde interferând pe suprafața apei

Probleme rezolvate

1. Două surse sincrone S_1 şi S_2 aflate la distanţa $d = 3$ cm una de cealaltă, produc oscilaţii de frecvenţă $\upsilon = 500$ Hz şi de amplitudini $A_1 = 3$ mm şi respectiv $A_2 = 5$ mm.

Calculaţi amplitudinea de oscilaţie a unui punct situat la distanţa $x_2 = 4$ cm de sursa S_2, pe perpendiculara dusă din S_2 pe direcţia ce uneşte cele două surse. Viteza de propagare a undelor prin mediul în care se află sursele este $v = 10$ m/s.

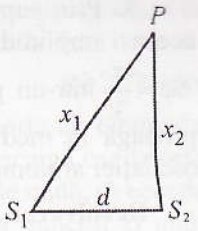


Fig. 2.19.

Rezolvare

În figura 2.19 observăm că $x_1 = \sqrt{d^2 + x_2^2} = 5$ cm.

Atunci $\Delta x = x_1 - x_2 = 1$ cm.

Întrucât $\lambda = \dfrac{v}{\upsilon} = 2 \cdot 10^{-2}$ m, rezultă $\Delta\varphi = 2\pi \dfrac{\Delta x}{\lambda} = \pi$ rad.

Amplitudinea rezultantă este:

$$A^2 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\Delta\varphi} = \sqrt{25 + 9 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos\pi} = 2 \text{ mm}.$$

2. Un punct P dintr-un mediu elastic cu densitatea $\rho = 7800$ kg/m^3 şi modulul de elasticitate $E = 10^{11}$ N/m^2 este supus simultan oscilaţiilor:

$y_1 = 2\sin(1500\pi t - \pi)$ (cm)

$y_2 = 3\sin(1500\pi t - 3\pi)$ (cm)

Aflaţi: a) viteza de propagare a undelor şi lungimea de undă; b) ce se produce în punctul P, un maxim sau un minim?; c) amplitudinea oscilaţiei rezultante în punctul P.

Rezolvare

a)

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{10^{11}}{7800}} = 3580 \text{ m/s}.$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= v \cdot T \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1500\pi} = \frac{1}{750} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{3580}{750} = 4{,}77 \text{ m}.$$

b) $\Delta\varphi = 2\pi$, deci se produce un maxim; în P oscilaţiile sunt în fază.

c) $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\Delta\varphi} = A_1 + A_2 = 5$ cm.

3. Prin suprapunerea a două unde produse de două surse care oscilează cu aceeaşi amplitudine $a = 5$ cm, aceeaşi frecvenţă $\upsilon = 1$ kHz şi care sosesc defazate cu $\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$ într-un punct, rezultă o oscilaţie cu amplitudinea A. Ştiind că undele se propagă în mediul respectiv cu viteza $v = 2000$ m/s, se cere: a) scrieţi ecuaţia oscilaţiei armonice rezultante; b) calculaţi diferenţa de drum în punctul considerat.

Rezolvare

a)

$$y_1 = 5\sin 2\pi\upsilon t \text{ (cm)}$$

$$y_2 = 5\sin\left(2\pi\upsilon t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)}.$$

Oscilaţia rezultantă va fi

$$y = y_1 + y_2 = 5\left[\sin 2\pi\upsilon t + \sin\left(2\pi\upsilon t - \frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Aplicăm relaţia trigonometrică:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

şi rezultă

$$y = 5\cdot 2\sin\left(2\pi\upsilon t - \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} =$$

$$= 5\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2\pi\upsilon t - \frac{\pi}{6}\right), \text{ sau}$$

$$y = 8{,}66\sin\left(2000\pi t - \frac{\pi}{6}\right)\text{(cm)}.$$

b)

$$\Delta x = \frac{\lambda\cdot\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\lambda}{6}.$$

Probleme propuse

1. Două unde care se propagă pe o coardă în aceeaşi direcţie, cu aceeaşi frecvenţă, au aceeaşi lungime de undă şi amplitudinea de 3 cm.

Care este amplitudinea undei rezultante dacă undele iniţiale sunt defazate cu $\frac{\pi}{3}$? **R:** 5,19 cm

2. Două surse de oscilaţii, S_1 şi S_2 emit unde ale căror amplitudini sunt $A_1 = 3$ mm şi $A_2 = 5$ mm. Frecvenţa undelor emise este $\upsilon = 160$ Hz iar viteza de

propagare este $v = 320$ m. Să se afle amplitudinea de oscilație a unui punct situat la distanța $x_1 = 6{,}5$ m de S_1 și $x_2 = 32/3$ m de S_2 dacă sursele oscilează în fază.

R: 7,74 mm

3. Extremitatea A a unui resort este pusă în mișcare oscilatorie cu elongația $y = 4 \sin 20\pi t$. Să se calculeze: a) amplitudinea și frecvența; b) mișcarea oscilatorie se propagă în lungul resortului cu viteza de 5 m/s; aflați lungimea de undă; c) ecuația undei într-un punct B situat la 50 cm de extremitatea A; d) în punctul B unda întâlnește o altă undă a cărei ecuație este $y' = 2\sin 2\pi(10t - 2)$. La întâlnire va exista un maxim sau un minim de interferență?

R: a) 4 m, 10 Hz; b) 50 cm; c) $y = 4\sin(20\pi t - 2\pi)$; d) maxim.

4. Două surse de unde plane, coerente și de aceeași amplitudine se află la distanțele $x_1 = 4{,}5$ m și $x_2 = 5$ m de un punct în care undele interferă. Dacă viteza de propagare a undelor este $v = 100$ m/s iar lungimea de undă este $\lambda = 2$ m, să se determine: a) frecvența oscilațiilor și diferența de fază în punctul de interferență; b) raportul dintre amplitudinea rezultantă și amplitudinile oscilațiilor componente.

R: a) 50 Hz, $\frac{\pi}{2}$ rad; b) $\sqrt{2}$.

5. Două surse oscilează într-un mediu elastic conform ecuațiilor:

$y_1 = 4 \sin 10\pi t$ (cm) și

$y_2 = 3 \sin 10\pi t$ (cm).

Dacă vitezele de propagare ale celor două unde sunt egale având valoarea $v = 2$ m/s, calculați: a) perioada și lungimea de undă; b) amplitudinea undei rezultante într-un punct în care diferența de drum între cele două unde este $\Delta x = 10$ cm; c) care este valoarea minimă a amplitudinii rezultantei?

R: a) 0,2 s, 0,4 m; b) 5 cm; c) 1 cm.

6. Fie oscilațiile $y_1 = 6\sin\frac{2\pi}{T}t$ (mm) și $y_2 = 8\sin\frac{2\pi}{T}t$(mm) care produc unde.

Să se calculeze amplitudinea undei rezultate prin interferența celor două unde într-un punct P, știind că diferența de drum este $\Delta x = 0{,}5$ cm, viteza de propagare $v = 0{,}5$ cm/s și perioada $T = 4$ s.

R: $\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$; $A = 10$ mm.

7. Două surse care oscilează conform ecuațiilor $y_1 = 3\sin\frac{2\pi}{4}t$ (cm) și $y_2 = 2\sin\frac{2\pi}{4}t$ (cm) emit unde plane. Să se calculeze amplitudinea undei rezultante într-un punct în care diferența de drum între cele două unde este $\Delta x = 5$ mm. Vitezele de propagare ale celor două unde sunt egale și au valoarea $v = 1$ cm/s.

R: $4{,}9 \cdot 10^{-2}$ m.

2.5.3. Unde staționare

Un caz particular de interferență îl constituie suprapunerea undei incidente cu unda reflectată pe aceeași direcție. Cele două unde sunt caracterizate de aceeași frecvență și au diferența de fază constantă, deci satisfac condiția de coerență.

Experiment

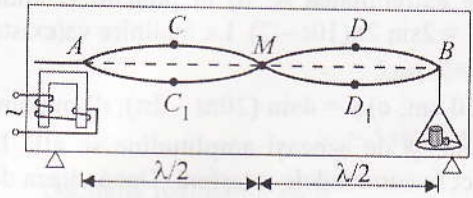


Fig. 2.20. Dispozitiv pentru producerea undelor staționare

O coardă elastică este legată la capătul A de lamela metalică a unui vibrator electromagnetic ca în figura 2.20. Celălalt capăt, B, susține un taler pe care se așază o greutate. Porțiunea de coardă AB poate fi considerată ca un fir fixat la ambele capete. Vibratorul imprimă capătului A o mișcare oscilatorie armonică pe o direcție perpendiculară pe AB. În coardă se propagă o undă transversală de la A spre B. Această undă se reflectă în B. Unda reflectată se propagă spre A și interferă cu unda incidentă.

Acest caz deosebit de interferență se numește undă staționară.

Unda staționară apare atunci când două unde coerente, de lungimi de undă egale, care se propagă în sensuri contrare, se suprapun.

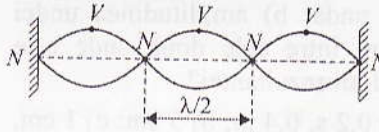


Fig. 2.21. Undă staționară într-un fir fixat la capete. V = ventru, N = nod

Unda staționară prezintă la distanțe egale cu $\frac{\lambda}{2}$ locuri în care oscilația este stinsă complet, numite *noduri* de oscilație și, între ele, locuri în care punctele oscilează cu amplitudine maximă, numite *ventre* de oscilație (din franceză, *ventre* = burtă) (fig. 2.21).

2.5.3.1. Noduri și ventre

Pentru a explica apariția nodurilor și a ventrelor, să considerăm un punct oarecare P, arbitrar ales, de pe firul întins (fig. 2.22). Ecuațiile undei incidente și undei reflectate care se suprapun în P sunt:

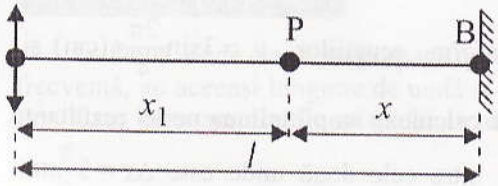


Fig. 2.22. În punctul P de pe fir se întâlnesc undele incidentă și reflectată

$$y_i = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) \qquad (2.13)$$

și

$$y_r = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l + x + \frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right). \qquad (2.14)$$

S-a ținut cont de faptul că pe mediul mai dens, în B, reflexia are loc cu pierdere de $\frac{\lambda}{2}$ și s-a considerat firul ca fiind mediu nedisipativ (amplitudinea oscilațiilor rămâne constantă în timp, unda reflectată are aceeași amplitudine ca și unda incidentă).

Diferența de fază între cele două unde care se suprapun în punctul P este, având în vedere că $x_1 = l - x$:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(2x + \frac{\lambda}{2}\right).$$

Amplitudinea rezultantă este:

$$A = \sqrt{a^2 + a^2 + 2a^2\cos\Delta\varphi} = \sqrt{2a^2(1+\cos\Delta\varphi)}. \tag{2.15}$$

Aplicând relația $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, obținem:

$$A = \sqrt{2a^2 \cdot 2\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}} = 2a\left|\cos\frac{\Delta\varphi}{2}\right|.$$

Deoarece amplitudinea este, prin definiție, o mărime pozitivă, rezultă:

$$A = 2a\left|\cos\frac{\pi}{\lambda}\left(2x + \frac{\lambda}{2}\right)\right|. \tag{2.16}$$

Din această relație observăm că amplitudinea oscilației rezultante este independentă de timp, dar variază periodic în funcție de poziția punctului pe fir (cu distanța x față de capătul B al firului).

a) Punctele pentru care amplitudinea este maximă ($A = 2a$) se numesc ventre și corespund valorilor lui x pentru care modulul cosinusului este unu, adică

$$\frac{\pi}{\lambda}\left(2x + \frac{\lambda}{2}\right) = k\pi,$$

deci

$$x_V = (2k-1)\frac{\lambda}{4} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.17}$$

b) Punctele pentru care amplitudinea are valoare minimă ($A = 0$) se numesc noduri și corespund valorilor lui x pentru care cosinusul este zero. Din

$$\frac{\pi}{\lambda}\left(2x + \frac{\lambda}{2}\right) = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

rezultă

$$x_N = 2k\frac{\lambda}{4} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.18}$$

Așadar:

– **ventrele sunt situate față de capătul fix la o distanță egală cu un număr impar de sferturi de lungimi de undă și oscilează cu amplitudinea maximă;**

– nodurile sunt situate față de capătul fix la o distanță egală cu un număr par de sferturi de lungimi de undă (număr întreg de semilungimi de undă) și sunt în repaus.

Pozițiile nodurilor și ventrelor pe fir nu se schimbă: punctele care oscilează cu amplitudine maximă, respectiv minimă, rămân tot timpul aceleași, de aici și numele de unde staționare.

Distanța dintre două ventre sau două noduri consecutive este $\frac{\lambda}{2}$, iar dintre un nod și un ventru consecutive este $\frac{\lambda}{4}$.

În cazul reflexiei fără pierdere de $\frac{\lambda}{2}$, nodurile se formează în locul ventrelor din cazul anterior, și invers (fig. 2.23).

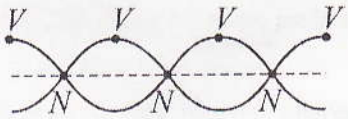


Fig. 2.23. Unda staționară într-o coardă cu ambele capete libere

Așadar, în unda staționară amplitudinile oscilațiilor variază de la un punct la altul și se repetă la distanțe egale cu $\lambda/2$.

Toate oscilațiile se produc cu fază egală sau opusă, astfel: particulele situate între două noduri succesive oscilează toate în fază (toate se depărtează sau se apropie de pozițiile lor de echilibru, trec simultan prin pozițiile de echilibru și simultan ating elongațiile maxime); la traversarea unui nod faza oscilațiilor se schimbă cu π radiani (elongația schimbă semnul). Dacă într-o parte a nodului elongația este pozitivă, în cealaltă parte, în același moment, va fi negativă.

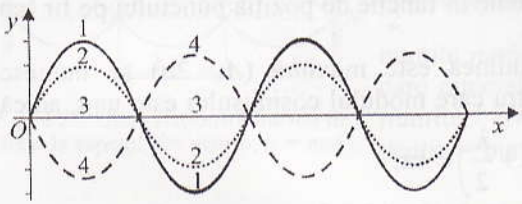


Fig. 2.24. Coarda la momente diferite

Observație: Imaginile undelor staționare din figura 2.21 și 2.23 sunt doar rezultatul suprapunerii pe retină a mai multor imagini ale firului, care se succed cu viteză (datorită persistenței imaginilor pe retină). În realitate, într-o perioadă T firul trece prin mai multe poziții succesive. În figura 2.24 sunt reprezentate elongațiile particulelor în momente succesive; în momentul 3 din figură toate particulele trec simultan prin pozițiile lor de echilibru.

2.5.3.2. Distribuția energiei în unda staționară

În cazul undelor staționare lipsește transportul de energie deoarece undele directe și cele reflectate, în urma suprapunerii cărora apare unda staționară, transportă energii egale în sensuri opuse.

Energia este localizată în ventrele de oscilație.

Într-o undă staționară energia sursei nu se mai transferă, dovadă fiind existența nodurilor, care nu oscilează. Energia fiecărui punct (exceptând nodurile) se schimbă din energie cinetică în energie potențială, dar pe ansamblul firului energia rămâne aceeași.

În figura 2.24, la momentul 1 punctele care sunt ventre își ating amplitudinea iar energia în coardă este exclusiv potențială. La momentul 2 ventrele încep să se întoarcă spre pozițiile lor de echilibru; energia punctelor de pe coardă este atât potențială (în scădere) cât și cinetică (în creștere). După un sfert de perioadă, la momentul 3 coarda este nedeformată, energia ei fiind exclusiv cinetică. După o jumătate de perioadă, la momentul 4 coarda este deformată la maxim, ventrele atingându-și amplitudinea în poziții simetrice față de cele ocupate la momentul inițial. Energia corzii este numai potențială. La momentul $t = 3T/4$ ventrele revin în pozițiile lor de echilibru cu viteza maximă ca de altfel toate punctele corzii. Energia sistemului este exclusiv cinetică, coarda fiind nedeformată. După încă un sfert de perioadă se încheie ciclul transformărilor, situația redevenind identică cu cea de la momentul inițial 1.

În absența pierderilor, energia se conservă, coarda fiind un sistem care poate oscila după ce a fost excitat din exterior. În realitate, sistemul disipă o parte din energia primită în procesul de excitare, funcționarea vibratorului fiind necesară tocmai pentru suplimentarea energiei disipate prin frecări. În caz contrar unda se amortizează repede și dispare.

2.5.3.3. Armonici. Rezonanță

Spre deosebire de un pendul simplu, care are numai o singură frecvență proprie de oscilație, o coardă întinsă (sau alte sisteme care vor fi discutate ulterior) are mai multe frecvențe naturale (proprii). Într-adevăr, întrucât la capetele fixe ale corzii pot fi situate numai noduri, rezultă că lungimea corzii trebuie să fie un număr întreg de jumătăți de lungimi de undă (fig. 2.25):

$$l = n\frac{\lambda}{2}.$$

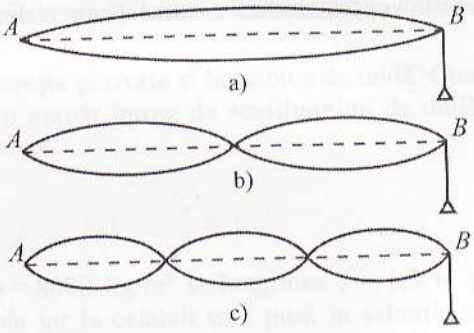


Fig. 2.25. Aspectul firului din figura 2.20 pentru prima, a doua și a treia armonică (a, b, c)

Dar

$$\lambda = \frac{v_t}{\upsilon} = \frac{1}{\upsilon}\sqrt{\frac{T}{\mu}}, \text{ deci}$$

$$l = \frac{n}{2\upsilon}\sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

Rezultă că o coardă fixată la amble capete poate oscila (staționar) numai cu anumite frecvențe, numite frecvențe proprii, date de relația:

$$\upsilon_n = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.19}$$

Frecvența proprie cea mai joasă υ_1 a corzii este dată de $n = 1$ și se numește frecvență fundamentală sau armonică de ordinul 1. Aspectul undei staționare este, în acest caz, cel din figura 2.25, a.

Pentru $n = 2, 3, \ldots$, se obțin frecvențele $\upsilon_2, \upsilon_3, \ldots$, numite armonici de ordinul 2, 3, ... (fig. 2.25, b, c).

Evident

$$\upsilon_2 = 2\upsilon_1 \quad \text{și} \quad \upsilon_3 = 3\upsilon_1.$$

În coardă se vor forma unde staționare, oricare ar fi valoarea υ a frecvenței vibratorului (fig. 2.20).

Dacă frecvența nu este egală cu una dintre frecvențele proprii ale coardei amplitudinea la ventre va fi mică.

Dacă însă frecvența externă este egală cu *oricare* dintre frecvențele proprii, coarda va intra în rezonanță și, în dreptul ventrelor, amplitudinea va fi mult mai mare.

De aceea, variind tensiunea T din coardă, de exemplu prin modificarea greutății de pe platanul din figura 2.20, se constată experimental că amplitudinea undei staționare este maximă numai pentru anumite valori „compatibile" cu lungimea l a corzii, așa cum am văzut mai sus. Aceasta înseamnă că transferul de energie de la sursă la coardă este un proces selectiv, care este maxim în anumite condiții, când prezintă caracteristicile unui **fenomen de rezonanță.**

ACTIVITATE EXPERIMENTALĂ

Studiul interferenței undelor mecanice în corzi elastice

Tema

Obținerea și observarea undelor staționare

Materiale necesare

- dispozitivul pentru producerea undelor staționare prezentat anterior (fig. 2.20)
- sursa de alimentare cu c.a.;
- mase marcate.

Modul de lucru

Modificând tensiunea din fir prin adăugarea sau coborârea de pe platan a unor corpuri suplimentare, se poate varia numărul ventrelor. Această schimbare se explică prin faptul că, modificând tensiunea în fir, se schimbă viteza de propagare a undei $v_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ și, în consecință, lungimea de undă care se calculează cu relația $\lambda = v_t \cdot T$. Astfel, mărind tensiunea, viteza crește și crește și lungimea de undă. Cum întreaga lungime a firului trebuie să fie un număr întreg de semilungimi de undă, numărul de ventre scade când tensiunea crește.

Probleme rezolvate

1. O coardă de oțel cu densitatea $\rho = 8000$ kg/m^3 și lungimea $l = 1{,}5$ m și diametrul $d = 3$ mm este fixată la un capăt iar la celălalt este pusă în vibrație cu frecvența $\upsilon = 500$ Hz.

La ce tensiune în coardă apar unde staționare cu un ventru la capătul pus în vibrație și cu patru noduri intermediare?

Rezolvare

Pentru situația cerută în problemă, aspectul corzii este cel din figura 2.26. Se observă că lungimea corzii este un multiplu întreg de sferturi de lungimi de undă:

$$l = 9\frac{\lambda}{4}.$$

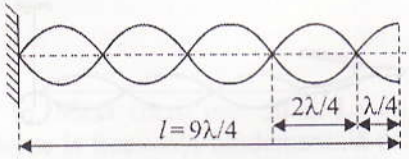


Fig. 2.26

Deci

$$\lambda = \frac{4l}{9} = \frac{2}{3}\text{m}.$$

Dar

$$\lambda = v \cdot T = \frac{v}{\upsilon} \Rightarrow v = \lambda \cdot \upsilon.$$

Viteza de propagare a undelor transversale în coardă este

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

deci

$$\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \lambda \cdot \upsilon,$$

de unde rezultă

$$T = \lambda^2 \upsilon^2 \mu.$$

Dar

$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{\rho \cdot V}{l}$$

şi întrucât $V = S \cdot l$, rezultă

$$\mu = \rho \cdot S = \rho \frac{\pi d^2}{4}.$$

Astfel,

$$T = \lambda^2 \cdot \upsilon^2 \cdot \rho \frac{\pi d^2}{4}.$$

$$T = \frac{4}{9} \cdot 25 \cdot 10^4 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{4} = 6280 \text{ N}.$$

2. Un fir de bumbac cu lungimea $l = 1$ m şi masa $m = 0{,}45$ g este fixat cu o extremitate de braţul unui diapazon şi cu cealaltă de un corp cu masa $m_1 = 100$ g. Ştiind că lungimea porţiunii orizontale a firului este $l = 1$ m şi că în fir s-au format trei ventre („fuse"), să se determine:

a) frecvenţa vibraţiilor produse de diapazon;

b) greutatea pe care ar trebui să o aibă corpul suspendat de fir pentru ca în firul orizontal să se formeze două fuse consecutive.

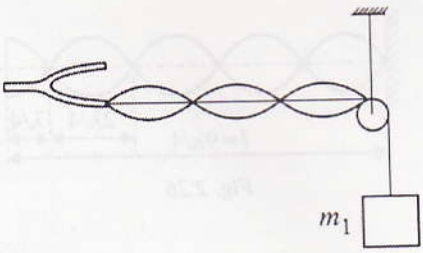


Fig. 2.27

Rezolvare

a) Aşa cum rezultă din figura 2.27, lungimea firului orizontal este un multiplu întreg de $\frac{\lambda}{2}$.

$$l = 3\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2l}{3}.$$

Dar

$$\upsilon = \frac{v}{\lambda}$$

și

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{m_1 g}{\frac{m}{l}}}.$$

Deci:

$$\upsilon = \frac{\sqrt{\frac{m_1 g l}{m}}}{\frac{2l}{3}}.$$

Făcând înlocuirile numerice și calculele, obținem $\upsilon = 70{,}71$ Hz.

b) Dacă vrem ca în firul orizontal să se formeze doar două fuse, atunci

$$l = 2\frac{\lambda'}{2} \Rightarrow \lambda' = l.$$

Dar

$$v' = \sqrt{\frac{T'}{\mu}}$$

și

$$v' = \lambda' \cdot \upsilon = l \cdot \upsilon$$

deci rezultă

$$l\upsilon = \sqrt{\frac{T'}{\mu}},$$

de unde

$$T' = \mu l^2 \upsilon^2$$

(frecvența diapazonului nu se schimbă).

$$T' = \frac{m}{l} \cdot l^2 \upsilon^2 = ml\upsilon^2.$$

Se obține $T' = 2{,}25$ N.

Probleme propuse

1. O coardă de violoncel are lungimea $l = 1$ m. Masa corzii este 50 g. La ce tensiune este supusă coarda dacă ea trebuie să vibreze la frecvența fundamentală de 66 Hz?

R: 871,2 N.

2. O coardă cu lungimea $l = 9$ m fixată la un capăt, primește la celălalt capăt impulsuri ritmice transversale de mică amplitudine cu frecvența $\upsilon = 3$ Hz. Viteza de

propagare a oscilațiilor în coardă este $v = 18$ m/s. Care este: a) lungimea de undă; b) numărul de fuse care se formează în coardă.

R: a) 6 m; b) $n = \frac{2l}{\lambda} = 3$.

3. Care este tensiunea dintr-un fir metalic cu lungimea $l = 3$ m și densitatea $\rho = 3 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$ atunci când emite un sunet fundamental de 50 Hz? Diametrul firului este $d = 2$ mm.

R: 847,8 N.

4. O coardă metalică ($\rho = 10{,}5 \cdot 10^3$ kg/m^3) cu lungimea $l = 2$ m și diametrul $d = 2$ mm este fixată la un capăt iar la celălalt este pusă în vibrație cu frecvența $\upsilon = 450$ Hz. La ce tensiune apar unde staționare cu un ventru la capătul pus în vibrație și cu cinci noduri intermediare?

R: 3531,3 N.

5. Un fir cu lungimea $l = 2$ m și masa $m = 0{,}45$ g este fixat cu o extremitate de brațul unui diapazon și cu cealaltă de un corp cu masa $m_1 = 200$ g. Știind că lungimea părții orizontale a firului este 2 m și că prezintă aspectul unui singur fus, să se calculeze: a) frecvența vibrațiilor diapazonului; b) masa corpului suspendat de fir pentru ca firul orizontal să formeze două fuse consecutive.

R: a) 23,58 Hz; b) $4{,}9 \cdot 10^{-2}$ kg.

2.6. ACUSTICA

2.6.1. Introducere

Acustica este acea diviziune a fizicii care se ocupă cu studiul producerii și propagării sunetelor. Prin sunet definim acea percepție auditivă produsă de propagarea prin aer (sau alt mediu) a vibrațiilor unor corpuri. Trebuie însă menționat că nu toate vibrațiile propagate prin aer și ajunse la organul auditiv-urechea, sunt percepute de subiectul uman. Acestea poartă denumirea de infrasunete și ultrasunete și vor fi studiate într-un subcapitol ulterior.

S-a arătat că vibrațiile produse într-un punct al unui mediu elastic se propagă în acel mediu sub formă de unde. În gaze, (deci și în aer) și în lichide, aceste unde sunt unde longitudinale, având proprietățile undelor elastice, după cum aceleași proprietăți se regăsesc și la unda sonoră în mediu solid elastic.

Conform relației stabilită de Newton, viteza sunetului în mediu solid elastic este dată de relația:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (2.20)$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinală a materialului iar ρ densitatea acestuia.

În *gaze*, în condiții normale de presiune și temperatură: $p_0=1{,}013\cdot10^5$ atm și $T_0=273$ K, viteza sunetului are expresia:

$$v_0=\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \tag{2.21}$$

unde γ este exponentul adiabatic al gazului ($\gamma=C_p/C_v$) iar ρ_0 densitatea gazului în condiții normale.

În cazul unui gaz aflat în condiții oarecare de presiune și temperatură:

$$v=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}=v_0\sqrt{1+\alpha t} \tag{2.22}$$

unde $\alpha=1/T_0=1/273\ K^{-1}$.

În aer de exemplu, $v_0=332{,}4$ m/s, aceasta în condițiile unei atmosfere uscate și considerând aerul ca pe un gaz perfect. Pentru $t=20^0$C, viteza sunetului conform (2.22) este $v=344{,}6$ m/s destul de apropiată de aceea determinată experimental și care este $v=344$ m/s.

În cazul atmosferei umede se utilizează relația:

$$v_{umed}=v_{uscat}\left(1+0{,}16\frac{F}{p}\right) \tag{2.23}$$

unde F este tensiunea vaporilor din aerul umed iar p presiunea măsurată.

În *lichide* viteza sunetului se calculează cu formula:

$$v=\frac{1}{\sqrt{K\rho_0}} \tag{2.24}$$

unde $K=1/E$ este coeficientul de compresibilitate al lichidului. În cazul apei de exemplu, $v\approx1420$ m/s.

Este interesant de remarcat faptul că la deplasarea undei de presiune în apa de mare, intervin mai mulți factori care influențează viteza, cum ar fi temperatura, adâncimea și salinitatea. O formulă ce aproximează satisfăcător viteza sunetului în apa de mare este:

$$v=1410+4{,}21t-0{,}0377t^2+0{,}0175d+1{,}14s \tag{2.25}$$

unde: t – temperatura (^{0}C)
d – adâncimea (m)
s – salinitatea ($^0/_{00}$)

2.6.2. Evaluarea percepției sonore

Omul percepe sunetele prin intermediul urechii. Calitățile acesteia sunt cele care au impus introducerea mărimilor de apreciere a intensității sunetului sau zgomotului. Conform legii lui Fechner și Weber, senzația acustică variază cu logaritmul excitației, așadar sensibilitatea urechii este una diferențială. Prin urmare, variația senzației acustice este independentă de mărimea intensității, ea depinzând numai de *variația relativă* a intensității acustice.

Gustav Theodor Fechner
(1801–1887)

Wilhelm Eduard Weber
(1804–1891)

Vom considera două senzații auditive S_1 și S_2 ce au intensitățile acustice medii I_1 și I_2. Se poate scrie relația:

$$S_2 - S_1 = K\frac{I_2 - I_1}{I_1} \tag{2.26}$$

unde K este o constanta de proporționalitate.

În cazul a două senzații foarte apropiate, relația (2.26) devine:

$$\mathrm{d}S = K\frac{\mathrm{d}I}{I} \tag{2.27}$$

care prin integrare devine:

$$S = K\ln I \text{ sau } S = K\lg I \tag{2.28}$$

Scriind relația (2.28) pentru două senzații și făcând diferența, rezultă:

$$S_2 - S_1 = K\lg\frac{I_2}{I_1} \tag{2.29}$$

Pentru K=1 vom avea:

$$S_2 - S_1 = \Delta S = \lg\frac{I_2}{I_1} \tag{2.30}$$

S-a convenit ca unitatea de măsură pentru ΔS să fie *belul*, denumire dată în memoria inventatorului telefonului, Graham Bell. În practică se utilizează însă pentru măsurarea nivelului de intensitate acustică o unitate de zece ori mai mică ce poartă denumirea de decibel (dB), care reprezintă *valoarea aproximativă a diferenței de nivel acustic ce poate fi detectată de către urechea umană.*

Nivelul de intensitate acustică este definită în raport cu o *intensitate de referință*, I_0=10^{-12}W/m^2 considerată ca *pragul de realizare a percepției acustice.* Notând cu L nivelul de intensitate acustică, se poate scrie:

$$L = 10\lg\frac{I}{I_0}\ [\mathrm{dB}] \tag{2.31}$$

ştiind că intensitatea acustică medie este:

$$I = \frac{p_{ef}^2}{\rho_0 v} \tag{2.32}$$

unde p_{ef} este presiunea eficace (efectivă) ce produce senzaţie auditivă, v este viteza sunetului în mediul respectiv iar ρ_0 densitatea acestuia în condiţii normale.

Înlocuind în (2.31) relaţia (2.32), se va obţine:

$$L = 10\lg\frac{p^2}{p_0^2} = 20\lg\frac{p}{p_0}\ [\text{dB}] \tag{2.33}$$

unde $p_0=2\cdot10^{-5}$ Pa şi reprezintă valoarea minimă a presiunii acustice care produce senzaţia auditivă.

Folosind relaţia (2.31), observăm că unei intensităţi $I=10I_0$ îi corespunde un nivel $L=10$ dB, unei intensităţi $I=100I_0$ îi corespunde nivelul $L=20$ dB, iar pentru o intensitate apropiată de *pragul senzaţiei de durere*, $I=10^{14}I_0$, rezultă o valoare a nivelului L=140 dB.

Însumarea a două niveluri de intensitate acustică se face ţinând seama că de fapt, se însumează intensităţile acustice ale celor două sunete (zgomote).

De exemplu, dacă $L_1=80$ dB şi $L_2=110$ dB rezultă că avem: $I_1=10^8I_0$ şi $I_2=10^{11}I_0$, aşadar intensitatea totală va fi $I=I_1+I_2=1{,}001\cdot10^{11}I_0$. Rezultă $L=10\lg(I/I_0)=110+10\lg1{,}001=110{,}0043$ dB.

2.6.3. Calităţile sunetului

Caracterizarea subiectivă a sunetului recepţionat se face în mod diferenţiat pentru *sunete pure*, *sunete melodioase* sau *zgomote*, în funcţie de senzaţiile acustice pe care acestea le produc şi de aspectele calitative şi cantitative pe care urechea le poate selecta. În acest sens, analiza percepţiei sonore trebuie făcută diferenţiat pentru următoarele calităţi ale sunetului: *tăria*, *înălţimea* şi *timbrul*.

2.6.3.1. Nivelul de tărie

Caracterizarea globală a sunetelor şi zgomotelor le împarte de regulă în *slabe* şi *tari*. În cazul unor sunete pure (de frecvenţă dată), se constată că două sunete având acelaşi nivel de intensitate acustică, de exemplu $L_1=30$ dB pot fi percepute din punct de vedere al auzului drept sunete audibile pentru o frecvenţă $f_1=1000$ Hz şi nu pot fi deloc auzite pentru $f_2=100$ Hz.

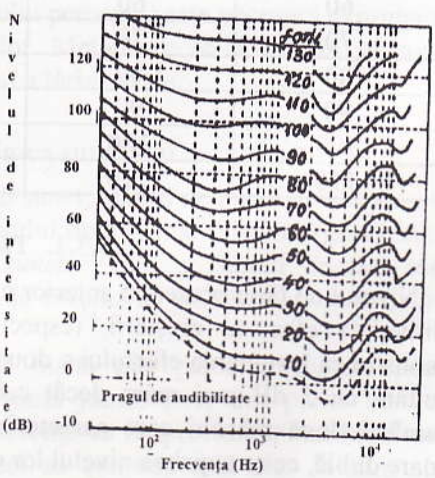


Fig. 2.28. Curbe de egal nivel de tărie

Se introduce noțiunea de *nivel de tărie:*

$$\Lambda = 20\lg\left(\frac{p}{p_0}\right)_{f=1000\,Hz} \tag{2.34}$$

valabilă doar la frecvența de 1000 Hz.

Unitatea de măsură a acestei mărimi este *fonul,* care la frecvența de 1000 Hz este egal cu decibelul (dB)-unitatea de măsură pentru nivelul de intensitate sonoră.

În cele ce urmează vom introduce noțiunea de *curbă de egal nivel de tărie* ce relevă percepția subiectivă a emisiei sonore, plecând de la premisa *ascultătorului otologic normal.*

Figurând locul geometric al punctelor ce reprezintă sunete pe întreaga gamă de frecvențe, la diverse niveluri de intensitate acustică, dar percepute la același nivel de tărie ca cel cu frecvența de 1000 Hz, în figura 2.28 sunt reprezentate curbele de egal nivel de tărie, fiecare fiind caracterizată de numărul de foni, numeric egal cu nivelul de intensitate acustică, în dB, la 1000 Hz.

În tabelul de mai jos sunt extrase câteva valori pentru a oferi o imagine mai clară a sensibilității urechii umane. Se observă că în intervalul aproximativ 2000 Hz-6000 Hz, aceasta este mai sensibilă și scade în sensibilitate, diferențiat spre sunetele joase. Rezultă deci că sunetele de frecvență înaltă sunt mai periculoase pentru ureche decât cele de frecvență joasă.

Nivelul de tărie (foni)	**Frecvența (Hz)**		
	1000	**200**	**100**
	Nivel de intensitate acustică (dB)		
20	20	27	36
30	30	34	44
40	40	43	51
50	50	50	59
60	60	59	68
70	70	69	77
80	80	78	85
90	90	88	94
100	100	99	104
110	110	110	114

2.6.3.2. Tăria sunetului

Nivelul de tărie prezentat anterior nu oferă o imagine clară a variației senzației auditive ca efect al creșterii, respectiv scăderii intensității sonore. Se poate demonstra că însumarea efectului a două surse de intensități egale produce un nivel rezultant cu 3 dB mai mare decât cel al unei singure surse. Ar fi normal ca, însumând două mărimi care caracterizează două surse identice să se obțină o valoare dublă, ce ar exprima nivelul lor cumulat.

O astfel de mărime este *tăria sunetului,* având ca unitate de măsură *sonul.*

Prin definiție, un *son* reprezintă tăria unui sunet pur cu frecvența de 1000 Hz și nivelul presiunii sonore de 40 dB. Legătura dintre tăria T și nivelul de tărie Λ este dată de relația:

$$T = 2^{\frac{\Lambda-40}{10}} \text{ [soni]} \qquad (2.35)$$

unde Λ este nivelul de tărie (foni).

Relația între *foni* și *soni* se mai poate da prin logaritmarea expresiei (2.35):

$$\Lambda = 33{,}3 \lg T + 40 \text{ [foni]} \qquad (2.36)$$

Alexander Graham Bell
(1847–1922)

Inginer și om de știință american.
În anul 1876, la vârsta de 29 de ani, a inventat telefonul, ca urmare a cercetărilor sale privind crearea unui limbaj prin semne pentru surdo-muți.
În anul 1877 a fondat Bell Telephone Company.

Noțiunea de tărie a sunetului a fost definită pentru un *sunet pur*, de frecvență dată, dar pentru a putea fi operațională în aprecierea percepției creșterii sau scăderii intensității sonore (efectul relativ al sunetului perceput) este necesară exprimarea în soni a *sunetelor complexe* și a zgomotelor. Metoda ce se utilizează se numește *metoda Stevens* și oferă o formulă de calcul a tăriei totale.

2.6.3.3. Înălțimea sunetului

Este o caracteristică importantă a unui sunet, alături de *nivelul de tărie* și *tăria sunetului*. Ea reprezintă proprietatea sunetului de a fi mai profund (grav) sau mai acut (ascuțit). Astfel, se pot percepe *sunete joase* și *sunete înalte*, aceasta depinzând de *frecvența sunetului* dar și de *nivelul de presiune sonoră* și *forma undei*.

De exemplu, un sunet de frecvență înaltă este perceput ca un sunet cu înălțimea mai mare decât unul de frecvență joasă. Dar, din punct de vedere subiectiv, între două sunete de aceeași frecvență va fi apreciat ca mai înalt sunetul de nivel acustic mai ridicat. Acest aspect se constată mai ales la sunetele de frecvență mai joasă.

Unitatea de măsură care apreciază înălțimea unui sunet se numește *mel* (de la melodie).

Deoarece vibrațiile libere ale mediilor continue se produc în general cu diferite pulsații proprii în comparație cu cele ale punctului material unde există o singură frecvență de vibrație, rezultă că acest corp (mediu elastic) va produce sunete de înălțimi diferite, corespunzătoare frecvențelor proprii ce pot fi determinate cu precizie.

Sunetul emis de corp și care are frecvența cea mai joasă, se numește *sunet fundamental*, iar sunetele corespunzătoare unor frecvențe egale cu multiplii întregi ai frecvenței sunetului fundamental se numesc *armonici superioare*.

Sunetele pure având o frecvență bine determinată sunt, însă, rar întâlnite în natură, sunetele naturale fiind de fapt compuse din sunete de diferite frecvențe.

Este importantă capacitatea urechii de a sesiza schimbarea frecvenței, pornind de la o frecvență dată, adică variația parametrului $(\Delta f/f)\%$ în raport cu frecvența f. Se remarcă că pentru frecvențe mici și intensități sonore moderate (peste 60 dB) se poate percepe diferența relativă de 3% a frecvenței de bază de 1000 Hz, însă pentru frecvențe de bază cuprinse între 1000-5000 Hz este sesizată o variație relativă de 0,3%, adică de 10 ori mai mare.

2.6.3.4. Timbrul sunetului

Timbrul desemnează o caracteristică a sunetelor melodioase produse de instrumente muzicale sau de vocea umană. El este elementul ce diferențiază sunetele având aceeași înălțime și tărie, produse însă de surse diferite.

Urechea umană percepe următoarele tipuri de emisii acustice: *sunete pure*, *sunete muzicale* și *zgomote*.

Sunetul pur este o vibrație armonică de frecvență dată, căruia în spectrogramă (graficul ce redă dependența nivelului acustic de frecvență) îi corespunde o linie în dreptul frecvenței de oscilație (fig. 2.29, a). În natură, după cum aminteam, aceste sunete se produc rar. Ele pot fi generate de aparate electronice în scopul testării unor caracteristici audiometrice. Percepția sunetelor pure este extrem de neplăcută.

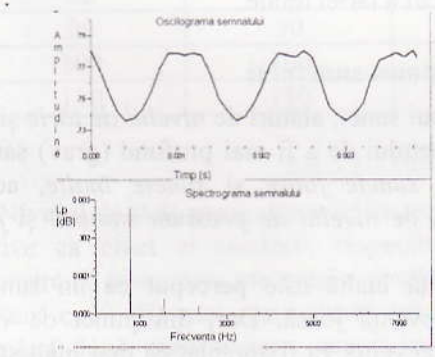


Fig. 2.29 a. Sunet pur

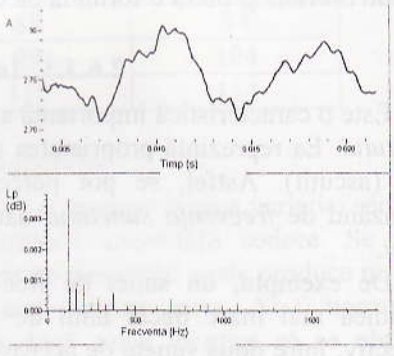


Fig. 2.29 b. Sunet muzical

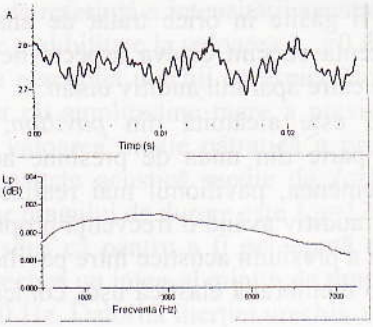


Fig. 2.29 c. Zgomot

Sunetul muzical este un sunet complex, format dintr-o frecvență fundamentală și un număr de armonici. Caracteristica unui sunet fundamental ce depinde de structura armonicilor se numește *timbru*. Se remarcă faptul că spectrul de linii corespunzător unei note muzicale produsă de un instrument, conține o frecvență de bază (fundamentală) și un număr oarecare de armonici cu nivele de intensitate acustică diferite (fig. 2.29, b).

Componentele armonice superioare ce însoțesc sunetul fundamental pot avea o infinitate de variante atât ca număr cât și ca distribuție a energiei acustice pe frecvențe (nivel de intensitate). Astfel, calitatea sunetului definită prin timbru permite distingerea aceleiași note muzicale emisă de instrumente sau voci umane diferite.

Zgomotul are o variație în timp a semnalului aleatoare, în timp ce în diagrama spectrală se poate distinge o linie continuă (fig. 2.29, c) ceea ce înseamnă că zgomotul conține toate armonicile. Un tip special de zgomot este *zgomotul alb* ce are în spectrogramă, o linie paralelă cu abscisa, ceea ce înseamnă că energia acustică este distribuită uniform de-a lungul întregului spectru din domeniul audibil, deci toate componentele spectrale au aceeași intensitate acustică.

2.6.4. Elemente de acustică fiziologică. Percepția sonoră

Organul auditiv percepe vibrațiile undei de presiune și le transformă printr-un complex proces senzorial în senzație auditivă. Urechea umană distinge atât *amplitudinea* undei acustice cât și *frecvența* oscilațiilor, realizând domenii distincte de percepție, atât pentru frecvență cât și pentru amplitudine.

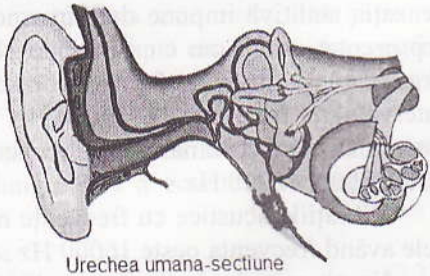


Fig. 2.30. Urechea umană

Din punct de vedere anatomic urechea este structurată pe trei secțiuni: *urechea externă*, *urechea mediană* și *urechea internă* (fig. 2.30). Fără a intra în detalii privind anatomia și fiziologia urechii

umane, detalii ce pot fi găsite în orice tratat de anatomie şi fiziologie umană, considerăm util a prezenta succint câteva aspecte de importanţă majoră privind perceperea sunetelor de către aparatul auditiv uman.

• *Urechea externă* este alcătuită din *pavilion*, *canal auditiv* şi *timpan*. Pavilionul *captează* o parte din unda de presiune acustică şi o dirijează către canalul auditiv. De asemenea, pavilionul mai realizează o *localizare globală* a sursei acustice. Canalul auditiv având o frecvenţă proprie de aproximativ 3000 Hz, realizează o *amplificare* a presiunii acustice între pavilion şi timpan de aproximativ 10 dB. Timpanul este o membrană elastică uşor conică având o frecvenţă proprie de 1200–1400 Hz.

• *Urechea mijlocie* este o cameră având o deschidere tubulară către exterior –trompa lui Eustache – ce este de obicei închisă. Aceasta se deschide atunci când se creează o diferenţă mare de presiune pe cele două feţe ale timpanului, realizând egalizarea acestora şi protejând în acest mod timpanul de străpungere, sau corectând funcţionarea defectuoasă a acestuia. În contact cu *timpanul*, spre urechea internă se găseşte *ciocanul* care la rândul său interacţionează cu *nicovala* şi aceasta în continuare cu *scăriţa*. Aceste trei oscioare se constituie într-un mecanism de *transmitere* şi *amplificare* a efectului de suprapresiune produs de unda sonoră de la timpan la *fereastra ovală*, locul de legătură cu urechea internă.

• *Urechea internă* are în componenţă *melcul* ce primeşte semnalul produs de scăriţă în fereastra ovală prin lichidul limfatic din imediata apropiere a ferestrei şi din interiorul melcului. Acesta, un tub de secţiune aproximativ circulară, răsucit în spirală de 2,75 ori, conţine două camere despărţite de membrana bazilară pe care se găsesc aproximativ 24000 de terminaţii nervoase.

Vibraţiile transmise de fereastra ovală limfei din melc, produc vibraţiile lichidului ce se manifestă prin mici turbioane ce induc impulsuri terminaţiilor nervoase de pe membrana bazilară, transmise mai departe la creier şi transformate în senzaţie auditivă.

Un mare cercetător, Helmholtz, este de părere că fibrele nervoase ale membranei bazilare (fibrele lui Corti), sunt asemenea corzilor de pian, având lungimi diferite, astfel că intră în vibraţie la diferite frecvenţe.

Fiind un fenomen subiectiv, recepţionat diferit de către indivizi diferiţi, senzaţia auditivă impune definirea noţiunii de *ascultător otologic normal* ce este reprezentat de un om cu vârsta de 18-25 ani, cu auz normal şi fără afecţiuni ale organului auditiv. Astfel, se consideră că urechea umană percepe sunete în intervalul de frecvenţe 16–16000 Hz, împărţit într-o gamă de 10 octave cuprinse în intervalele dintre următoarele frecvenţe: 16, 32, 64, 125, 250, 500, 1000, 2000, 4000, 8000, 16000 Hz.

Vibraţiile acustice cu frecvenţe mai mici de 16 Hz se numesc *infrasunete*, iar cele având frecvenţa peste 16000 Hz se numesc *ultrasunete*.

Un alt criteriu de limitare a domeniului de audibilitate este legat de valoarea amplitudinilor vibraţiilor de presiune recepţionate. S-a stabilit că limita de percepţie a sunetului se realizează la o valoare medie pătratică a presiunii

$p_0=2\cdot10^{-5}$ Pa sau la valoarea de referință a intensității acustice medii $I_0=10^{-12}$ W/m^2. Astfel se stabilește pragul de audibilitate la valoarea $L_{pa}=0$ dB. Un al doilea prag de audibilitate este cel legat de percepția urechii corespunzătoare senzației de durere pe care o produce un sunet cu amplitudine mare a presiunii. Este vorba despre *pragul durerii* pentru care valoarea medie pătratică a presiunii este $p_1=2\cdot10$ Pa căreia îi corespunde o intensitate acustică medie de $I_1=10$ W/m^2. În acest caz nivelul acustic corespunzător pragului de durere este $L_{pd}=120$ dB.

De asemenea, trebuie spus că pentru a fi percepută ca sunet, perturbația de presiune trebuie să excite urechea un interval minim de timp de 60 ms, respectiv un număr de 6 perioade la 1000 Hz. Datorită inerției urechii, senzația de sunet va mai persista cam 50-60 ms după încetarea acestuia.

2.6.5. Surse sonore. Analiza calitativă a funcționării instrumentelor muzicale cu coarde și de suflat

S-a arătat că în general orice mediu continuu (corp) aflat în vibrație, poate constitui o sursă sonoră datorită producerii undelor elastice în mediul de propagare. Sunt cunoscute și studiate mai multe tipuri de surse acustice cum ar fi: coardele vibrante, tuburile sonore, tijele, membranele, plăcile, diapazoanele, sferele pulsante, cilindrii pulsanți, pistonul vibrant, sursele punctuale, organul vocal etc.

În capitolul de față vor fi prezentate câteva aspecte privind producerea sunetelor în coarde vibrante și tuburi sonore, aceste surse stând la baza construcției și funcționării multor tipuri de instrumente muzicale (pian, vioară, violoncel, contrabas, chitară, mandolină etc. – pentru coarde, orgă, flaut, trompetă, nai, saxofon, corn, fluier etc. – pentru tuburi).

a) **Coarda vibrantă.** În fizică, prin coardă se înțelege un fir omogen perfect flexibil (ce nu opune nici o rezistență la deformările transversale-perpendiculare pe lungimea lui) și fixat rigid la ambele capete. Producerea vibrațiilor în aceste coarde poate fi făcută prin ciupire (chitară, mandolină), cu arcușul (vioară, violoncel), prin lovire (pian).

Propagarea perturbației produsă într-un punct al coardei se produce în lungul acesteia și ajungând la unul dintre capete perturbația este *reflectată* și se va propaga în sens contrar, reflectându-se apoi la celălalt capăt etc. Se produce astfel, prin *interferență* o undă staționară ce are *noduri* la capetele coardei în punctele de fixare ale acesteia.

Condiția de formare a unei unde staționare este ca unda directă și cea reflectată să aibe aceeași fază. Așadar în lungimea l a coardei este cuprins un număr întreg de semiunde:

$$l=n\frac{\lambda}{2} \qquad n=1,2,... \tag{2.37}$$

sau cu alte cuvinte, o coardă de lungime l va produce doar sunete cu lungimea de undă:

$$\lambda = \frac{2l}{n} \tag{2.38}$$

având frecvența:

$$\nu = \frac{vn}{2l} \tag{2.39}$$

unde v este viteza sunetului în coardă.

Prin urmare, frecvența sunetului fundamental (n=1) va fi $\nu_1 = v/(2l)$, armonicile superioare obținându-se pentru n=2,3, ..., adică vor avea frecvențele $\nu_2 = v/l$, $\nu_3 = 3v/(2l)$ ș.a.m.d. În figura 2.31 sunt redate câteva forme proprii de vibrații ce pot avea loc într-o coardă excitată, fixată la capete.

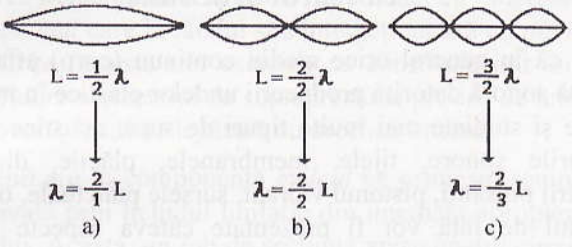


Fig. 2.31. Primele 3 moduri proprii de vibrație ale unei corzi de chitară

Se observă că există puncte ale coardei unde au loc vibrații de amplitudine maximă, acestea purtând denumirea de *ventre* și puncte în care nu au loc mișcări, acestea fiind denumite *noduri*. De regulă, intensitatea sunetului fundamental este mult mai mare decât cea a armonicilor superioare. S-a constatat însă că intensitatea relativă a armonicilor față de aceea a sunetului fundamental poate crește dacă punctul de excitare se va afla mai aproape de capătul corzii. De asemenea, anumite armonici nu se vor mai produce în cazul în care ciupirea (excitarea) corzii se face într-un nod al undei staționare. Cu alte cuvinte, dacă vom excita coarda la mijlocul său, vom constata că nu vor mai apărea armonicile pare corespunzătoare pentru n=2,4,6,...(nu se poate forma unda staționară n=2 din fig. 2.31, b) iar dacă vom excita la 1/3 de capăt nu vor apărea armonicile pentru n=3,6,9,...

b) **Tubul sonor.** Acesta este definit ca un tub cu pereți rigizi ce produce sunete în momentul în care aerul din interiorul său vibrează. În figura 2.32 sunt prezentate tuburi sonore simple compuse din două camere: camera de compresiune A și camera (tubul) de rezonanță B. Aerul este suflat printr-un tub de secțiune mai mică în camera A, de unde este forțat să iasă printr-un orificiu mic unde lovește o pană (buză) ascuțită, forțând-o să vibreze. În acest moment se produce un sunet perceptibil și în absența tubului rezonator B. Rolul acestuia este de a „întări" anumite armonici ale sunetului compus emis.

Fig. 2.32. Tuburi sonore

S-a constatat că frecvența sunetului produs de vibrația aerului într-un tub sonor depinde doar de lungimea acestuia. Aşadar diametrul tubului, materialul din care acesta este confecționat sau forma axei tubului nu influențează frecvența sunetului emis.

Tuburile sonore deschise (fig. 2.32, a) au un comportament în ceea ce privește formarea undelor staționare precum cel al *tubului liber la ambele capete*. Aşadar trebuie să existe ventre atât la capătul unde există orificiul şi pana vibratoare cât şi la capătul tubului rezonator B unde sunetul se va reflecta pe aerul liber. În acest caz vor fi întărite acele sunete pentru care lungimea l a tubului cuprinde un număr întreg de semiunde

$$l = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 1,2,... \tag{2.40}$$

Frecvența sunetelor emise va fi:

$$\nu = \frac{vn}{2l} \tag{2.41}$$

unde v este viteza sunetului în aer.

Frecvența sunetului fundamental (n=1) este $\nu_1 = v/(2l)$, iar cele ale armonicilor superioare sunt $\nu_2 = v/l$, $\nu_3 = 3v/(2l)$ ş.a.m.d. (fig. 2.33).

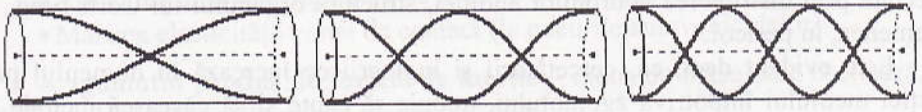


Fig. 2.33. Moduri proprii la tuburile deschise

În cazul *tuburilor sonore închise* (fig. 2.32, b) reflexia se face pe capătul închis al tubului, care este un mediu mai dens, deci acesta se va constitui într-un nod, iar capătul unde se află pana va fi un ventru. În acest mod se vor întări acele sunete pentru care avem:

$$l = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \tag{2.42}$$

Deci, frecvența sunetelor emise de un astfel de tub va fi dată de relația:

$$\upsilon = \frac{(2n+1)\upsilon}{4l} \tag{2.43}$$

Sunetul fundamental de frecvență $\upsilon_0=\upsilon/(4l)$ emis de tubul închis are înălțimea egală cu jumătate din aceea emisă de tubul deschis având aceeași lungime.

Trebuie amintit, de asemenea, comportamentul tuburilor închise ce este considerat aidoma tubului închis la un capăt și deschis la celălalt. În realitate, însă, tubul nu este complet deschis la capătul unde se găsește pana, vibrația aerului fiind aici parțial împiedicată. Frecvența sunetului fundamental va fi ceva mai mică în realitate decât aceea dată de relația (2.43). Considerații similare pot fi făcute și în cazul tuburilor deschise, unde se constată o alungire aparentă a lungimii l a tubului sonor deschis, cu o valoare $\Delta l \approx 0,41d$ unde d este diametrul tubului.

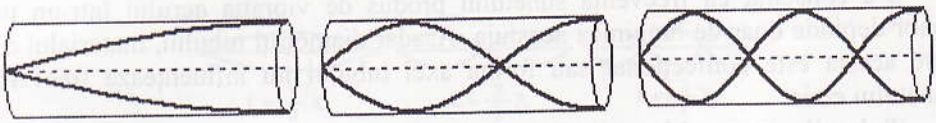


Fig. 2.34. Moduri proprii la tuburile închise

2.6.6. Aplicarea unor măsuri de protecție a persoanelor și a mediului împotriva efectelor nocive ale sunetului

Trebuie precizat că expunerea unei persoane un timp îndelungat la un nivel ridicat de zgomot poate duce la *pierderea definitivă a auzului.* Există o multitudine de teorii ce se ocupă cu predictibilitatea posibilităților de risc privind expunerea la zgomot. Nici una dintre acestea nu este considerată absolut valabilă, datorită gradului mare de diversitate a particularităților anatomice și fiziologice ale fiecărui individ în parte. Totuși, prelucrarea statistică a unor date experimentale a condus la anumite concluzii importante privind riscul de pierdere a auzului pentru grupele de lucrători din locuri de muncă zgomotoase, prin distrugerea celulelor senzoriale ale auzului, localizate pe membrana bazilară. Concomitent, urechea internă este afectată prin distrugerea neuronilor audiției, structura organului lui Corti fiind, de asemenea, în pericol.

Este evident deci, că, cercetătorii și inginerii ce lucrează în domeniul protecției mediului împotriva zgomotului, trebuie să caute și să găsească metode de reducere a zgomotului la *sursa de producere* sau să conceapă și să realizeze mijloace de *insonorizare acustică* în zonele de risc în ceea ce privește emisia sonoră.

Pierderea auzului se măsoară în *unități de modificare a pragului de audibilitate.*

Eforturile de reducere a zgomotului sunt canalizate în primul rând către *reducerea la surse* a zgomotului și mai apoi la protejarea indivizilor și a comunităților umane împotriva efectelor nocive ale zgomotului.

2.6.6.1. Reducerea zgomotului la surse

a) *Surse de zgomot aerian*

Orice curent de gaz poate produce zgomot prin *turbulență*, *șoc* și *pulsații*. Turbulența poate avea și componente tonale la trecerea curentului de aer peste un cilindru, cum ar fi un coș de fum. Tonurile pot apărea și la trecerea curenților de aer prin cavități, cum ar fi găurile unui flaut, sau pe lângă muchiile cuțitelor mașinilor de prelucrat lemnul.

Curenții cu viteze mari la ieșirea duzelor sau la periferia ventilatoarelor, generează vârtejuri ce duc la apariția unui zgomot de bandă largă. Nivelul de zgomot și spectrul acestuia depind de viteza curentului, vâscozitatea mediului și geometria duzei. Se poate, așadar, obține o reducere a zgomotului micșorând viteza curentului de gaz în regiunea de contact prin diminuarea diferențelor de presiune, utilizând diametre mai mari, sau prin curenți de derivație la ieșirea țevilor. Pentru reducerea șocurilor și pulsațiilor în gaze, este necesar să se recurgă la:

- Reducerea vitezei de schimbare a presiunii
- Evitarea obstacolelor din apropierea rotorului

a) *Surse de zgomot structural*

Acestea sunt:

– **zgomotul de impact** ce apare la impactul (ciocnirea) corpurilor (de exemplu, angrenajele cu roți dințate). Rezultă un zgomot de bandă largă, dominat de frecvențe înalte, datorită duratei scurte a impactului. Sunt recomandabile următoarele măsuri de reducere a zgomotului:

- Mărirea duratei impactului
- Micșorarea vitezei impactului
- Reducerea la minimum a masei care lovește liber
- Mărirea masei corpului fix

– **zgomotul de rulare** ca rezultat al asperităților sau neregularităților din zona de contact a suprafețelor de rulare (de exemplu, rulmenții cu bile, cu role, vehicule pe șine, rutiere etc.). Se recomandă ca măsuri de reducere a zgomotului:

- Menținerea netedă a suprafețelor de rulare
- Aplicarea unei lubrifieri corecte în zona de rulare (la rulmenți)
- Mărirea elasticității zonei de contact (la pneurile autovehiculelor)

– **zgomotul produs de forțele de inerție** – indus de mase care oscilează, de părți neechilibrate sau în rotație. Se recomandă:

- Echilibrarea rotorilor sau contrabalansarea maselor în mișcare
- Reducerea la maximum posibil a maselor accelerate
- Uniformizarea pe cât posibil a mișcării

– **zgomotul produs de forțele de frecare** prin fenomenele de *lipire* și *alunecare* (de exemplu, la discurile de frână, în articulații și lagăre etc.). Se recomandă:

- Reducerea frecării prin alegerea corectă a materialelor ce vin în contact
- Diminuarea frecării prin lubrifiere adecvată
- Mărirea amortizării structurii

– **zgomotul produs de câmpurile magnetice** ce apar, de exemplu, în motoarele electrice pentru generarea cuplurilor de rotație. Se pot lua măsuri de proiectare și execuție specifice simetrizării câmpurilor electromagnetice și a evitării excitației rezonanțelor în rotor și stator.

2.6.6.2. Reducerea transmisiei zgomotului

Zgomotul aerian corespunzător vibrației diferitelor părți ale mașinilor se transmite în mediul înconjurător. Pentru reducerea acestei transmisii sunt folosite diferite mijloace ce constau în: aplicarea *carcaselor absorbante acustic*, a *atenuatoarelor* și *mijloacelor de absorbție acustică*. Fenomenele fizice utilizate în aceste măsuri cuprind *reflexia* sunetului și *absorbția*. Se folosesc:

- *carcasele acustice* ce reprezintă capote fonoizolante închise. Sunt fabricate din plăci subțiri de metal pentru a împiedica reflexia zgomotului. Pentru a fi eficientă, carcasa trebuie căptușită la interior cu materiale fonoabsorbante din material poros, cu grosimea dependentă de cea mai joasă frecvență ce trebuie atenuată.

- *ecranele* ce se pot monta în apropierea unor componente mici ale mașinilor ce au o emisie ridicată de zgomot. Eficiența acestora este mai scăzută decât cea a carcaselor și depinde de direcția de propagare a sunetului și de distanța la surse.

- *atenuatoarele* împiedică transmisia sunetului aerian prin deschideri (fante, ajutaje etc.). *Atenuatoarele cu absorbție* sunt de tip „canal căptușit cu material poros". *Atenuatoarele cu reflexie* aplică principiul reflexiei sunetului la schimbarea bruscă a suprafeței secțiunii conductelor.

- *panourile foto-absorbante* sau *reflectorizante* montate în apropierea autostrăzilor cu trafic intens pentru protecția colectivităților umane aflate în apropiere.

În continuare prezentăm câteva dintre reducerile de zgomot ce pot fi obținute utilizând echipamente specifice:

– amortizoare de vibrație – 30dB;
– izolatori de vibrație – 30dB;
– ecrane acustice – 15dB;
– carcase acustice – 40dB;
– tavane absorbante – 5dB;
– atenuatoare – 10dB;
– protectoare auditive – 15dB.

2.7. ULTRASUNETE ŞI INFRASUNETE. APLICAŢII ÎN MEDICINĂ, INDUSTRIE, TEHNICĂ MILITARĂ

A. Ultrasunete

2.7.1. Introducere

Sunetele a căror frecvenţă depăşeşte 20000 Hz, care ies aşadar din domeniul audibil al urechii umane, poartă denumirea de *ultrasunete*. Acestea, începând cu perioada de debut a celui de-al doilea război mondial au început să intre în vizorul oamenilor de ştiinţă datorită multitudinilor aplicaţiilor practice ce se întrevedeau ca urmare a unor caracteristici specifice acestui tip de unde.

Caracteristica cea mai importantă a ultrasunetelor este aceea că ele au o *lungime de undă foarte mică*. De aceea, ele au emisia şi propagarea asemănătoare razelor luminoase, adică sub formă de *fascicule*, în timp ce sunetele audibile se împrăştie în toate direcţiile. Această caracteristică a ultrasunetelor face ca fenomenul de *difracţie* (ocolirea obstacolelor) să apară doar în cazul obstacolelor foarte mici spre deosebire de sunetele audibile ce pot ocoli aproape toate obstacolele.

De asemenea, *reflexia* şi *refracţia* ultrasunetelor este similară cu cele ale undelor luminoase. Este aşadar lesne de înţeles că anumite principii ale focalizării fasciculelor luminoase cu ajutorul unor oglinzi concave sau lentile speciale puteau fi aplicate şi în cazul ultrasunetelor.

O consecinţă importantă a frecvenţelor înalte ale acestui tip de unde este aceea că *energia transportată de ultrasunete este mult mai mare decât energia sunetelor având aceeaşi amplitudine*. Aceasta deoarece intensitatea undelor sonore este direct proporţională cu pătratul frecvenţei.

O altă consecinţă importantă a frecvenţelor înalte ale ultrasunetelor se referă la fenomenul de *absorbţie* ce apare în cazul propagării tuturor oscilaţiilor elastice. Considerând că un sunet este complet absorbit de mediul de propagare atunci când intensitatea sa se reduce la 10^{-2} din cea iniţială, se constată că nu se poate produce propagare de ultrasunete în aer, la o distanţă mai mare de 1000 m, iar un sunet având o frecvenţă de $3 \cdot 10^6$ Hz este complet absorbit la aproximativ 6 mm de la sursă. Situaţia este diferită în lichide unde aşa-numitul coeficient de absorbţie este de 2-3 ori mai redus, deci distanţa parcursă este mai mare, iar în medii solide acest coeficient are valori chiar mai reduse ceea ce conduce la o atenuare mai mică a intensităţii ultrasonice.

La trecerea ultrasunetelor prin lichide are loc însă un fenomen interesant, acela de *cavitaţie* ce constă în apariţia unor bule de aer în volumul de lichid care evident se ridică la suprafaţa acestuia şi se sparg, dând aspectul de „lichid care fierbe". Explicaţia rezidă în faptul că în lichid apar în zonele de trecere ale fasciculului

ultrasonic tensiuni foarte mari, datorită succesiunii rapide a dilatărilor şi comprimărilor survenite în masa lichidului, fenomen ce duce la aşa-zisa „rupere" a moleculelor ce conduce la disociere – în cazul apei de exemplu – gazele eliberate sub formă de bule contopindu-se între ele şi dând naştere unora mai mari, care încep să vibreze, apoi se sparg generând presiuni locale foarte mari, care conduc la apariţia de şocuri hidraulice în volume mici. Aceste şocuri sunt extrem de periculoase pentru funcţionarea şi siguranţa instalaţiilor hidraulice cum ar fi de exemplu paletele turbinelor sau elicelor de vapoare, la care fenomenul de cavitaţie apare datorită ultrasunetelor generate de vibraţiile motoarelor acestora.

Dintre efectele fizico-chimice produse de ultrasunete în mediile pe care le străbat, datorită energiei mari transportate, vom aminti:

- încălzirea mediului.
- formarea şi distrugerea de sisteme disperse (emulsii şi suspensii-coagulări).
- creşterea vitezei anumitor reacţii chimice.
- voalarea suporturilor fotografice (filme, plăci, formate radiologice, hârtie foto etc.).
- modificarea potenţialelor electrochimice şi a pasivităţii metalelor.
- explozia unor substanţe cu stabilitate redusă.

Datorită acestor efecte şi proprietăţi de care ultrasunetele se bucură s-a găsit o multitudine de aplicaţii ale acestora în variate domenii ale activităţilor umane. Pentru a le putea utiliza, ultrasunetele trebuie mai întâi produse. Până la a descrie modalităţile prin care omul poate produce ultrasunete trebuie să amintim că natura a fost şi de această dată înaintea sa, înzestrând liliacul cu un „aparat de vedere" ultrasonic extrem de performant, un adevărat *sonar* ce funcţionează, fără a intra în detalii, pe principiul emisiei unor unde ultrasonore de frecvenţe înalte ce se reflectă atunci când întâlnesc un obstacol, semnalul-ecou reflectat fiind recepţionat de urechile liliacului după timpi diferiţi în funcţie de distanţa până la obstacol. În acest mod liliacul are o remarcabilă precizie de ocolire a obstacolelor ivite în zbor.

Dintre modalităţile de producere artificială a ultrasunetelor menţionăm:

- producere prin fenomene termice-vibraţiile unui arc electric.
- producere prin fenomene mecanice-fluier ultrasonor sau sirenă ultrasonoră.
- producere prin fenomene *piezoelectice*-apariţia de sarcini electrice egale şi de semne contrare pe feţele unor cristale supuse la deformări de tracţiune sau compresiune ce îşi schimbă polaritatea la schimbarea solicitării din tracţiune în compresiune şi invers.
- producere prin fenomene magnetostrictive (deformarea corpurilor magnetice – fier, cobalt, nichel – sub acţiunea câmpurilor magnetice).
- producere cu dispozitive electronice.

2.7.2. Aplicaţii ale ultrasunetelor

De la descoperirea lor şi până astăzi ultrasunetele şi-au găsit întrebuinţarea într-o multitudine de domenii ale activităţii omului, începând cu medicina, apoi cu măsurările adâncimilor abisale, continuând cu industria alimentară, industria de

prelucrare a materialelor, activitatea de investigare prin *defectoscopie ultrasonică*, industria de apărare etc.

În **medicină**, ultrasunetele şi-au găsit tot mai multe întrebuinţări pe măsură ce calităţile lor au început să fie tot mai bine cunoscute şi înţelese. Este de neconceput astăzi o investigaţie competentă şi complexă fără a folosi un *ecograf* (fig. 2.35). Palpatorul ecografului foloseşte fascicule de ultrasunete al căror „ecou" este prelucrat electronic sau digital şi este transformat în imaginea ecografică cu care aproape toţi suntem obişnuiţi în zilele noastre. Ca metode şi aparatură de ultimă oră amintim aici *tomografia* şi evident *tomograful cu ultrasunete* (fig. 2.36) folosit în investigarea şi diagnosticarea oftalmologică. În chirurgie, de ani buni au fost puse la punct tehnici şi aparatură ultrasonică de intervenţie *laparoscopică* sau *endoscopică* în combaterea calculilor renali, biliari, în artroze şi alte afecţiuni. De asemenea, şi-a făcut loc tot mai des în practica investigării şi tratării osteoporozei folosirea *osteodensimetrului cu ultrasunete*. Industria de „frumuseţe" – activitatea de medicină plastică şi reparatorie – foloseşte în mod curent aparatură cu ultrasunete pentru *remodelare corporală şi facială*, iar în saloanele moderne şi elitiste de cosmetică există *depilatoare cu ultrasunete*. Sunt cunoscute în bună măsură aparatele cu ultrasunete de *detartraj dentar* folosite în cabinetele de stomatologie. Există evident şi alte domenii ale medicinei în care se folosesc diferite metode şi terapii ce necesită încălziri locale ale ţesuturilor, lucru ce se realizează cu aparatură specială ce funcţionează cu fascicule de ultrasunete. Fără a se dori a fi exhaustivă, enumerarea aplicaţiilor medicale ale ultrasunetelor se va opri aici.

Fig. 2.36. Tomograf

Fig. 2.35. Ecograf

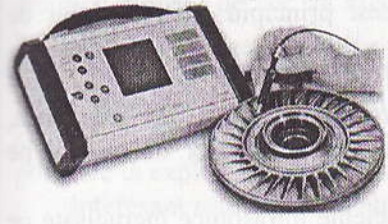


Fig. 2.37. Defectoscop

În **industrie**, *defectoscopia ultrasonică* este folosită de foarte mult timp pentru activitatea de control nedistructiv al anumitor piese obţinute în procesele de fabricaţie. Această metodă permite depistarea anumitor defecte (fisuri, pori, goluri etc.) ce pot exista în interiorul anumitor piese metalice masive, ca urmare a proceselor tehnologice la care au fost supuse. Principiul de funcţionare al *defectoscopului* (fig. 2.37) este simplu. Emiţătorul şi receptorul ultrasunetelor sunt situate de o parte şi de alta a piesei de investigat. Dacă pe direcţia sursă-receptor nu există defect, semnalul va trece neatenuat. Dacă pe această direcţie fasciculul ultrasonor întâlneşte un gol de exemplu, o parte a semnalului este reflectat pe suprafaţa de separaţie dintre metal şi aerul din gol, semnalul atenuându-se semnificativ. Aceste diferenţe de semnal sunt

preluate şi prelucrate de aparaturi mai mult sau mai puţin sofisticate în funcţie de tipul, generaţia şi preţul defectoscopului. Acest tip de *defectoscopie prin transmisie* are însă câteva inconveniente majore, printre care acela că nu poate fi cunoscută adâncimea la care sunt depistate defectele. Acest fapt a condus la apariţia şi dezvoltarea *defectoscoapelor cu reflexie (prin impulsuri)*. La acestea, emiţătorul şi receptorul sunt situate de aceeaşi parte a piesei, fasciculul ultrasonor propagându-se prin piesă, fiind reflectat de cealaltă faţă a acesteia şi fiind receptat după un anumit interval de timp.

Dacă fasciculul întâlneşte un defect, semnalul va fi reflectat de acesta şi va ajunge înapoi la receptor mult mai devreme decât în cazul anterior. Aceste decalaje de timp sunt analizate digital şi oferă informaţii exacte asupra adâncimii la care se găseşte defectul.

Tot în industrie sunt folosite aparate de măsură ce folosesc energia ultrasonică pentru controlul dimensional al unor piese de complexitate ridicată, piese al căror control cu alte metode ar fi extrem de anevoios (fig. 2.38). Aparatul oferă într-un timp scurt 54000 de valori ale grosimilor măsurate pe piesă. Alte aplicaţii ale ultrasunetelor în industrie au condus la apariţia *maşinilor de prelucrat prin eroziune*. Piesele ce trebuie prelucrate astfel, sunt introduse într-o cuvă cu un lichid ce conţine particule în suspensie de praf abraziv dur.

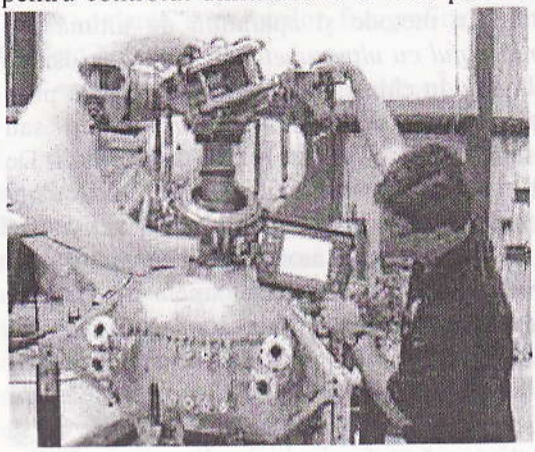


Fig. 2.38. Aparat de măsură

Cu ajutorul unui generator ultrasonic, se produce cavitaţie în interiorul lichidului. Particulele abrazive sunt lovite cu forţe percutante foarte mari de suprafeţele piesei, desprinzând efectiv aşchii de pe acestea. Pe acest principiu există maşini de prelucrat filete şi de danturat roţi dinţate, de rectificat piese de complexitate ridicată etc.

Telemetrele cu ultrasunete, ruletele cu ultrasunete sunt, de asemenea, instrumente de măsurare a distanţelor, extrem de precise şi uşor de utilizat pe reliefuri accidentate sau în locuri greu accesibile.

Debitmetrul cu ultrasunete foloseşte două fascicule ultrasonice încrucişate ce măsoară debitele volumice pe baza efectului Doppler.

În industria auto sunt folosite echipamente denumite *avertizor de parcare* ce avertizează prin semnale acustice sau luminoase şoferul atunci când, efectuând manevre de parcare apropie automobilul la o distanţă predeterminată de vreun obstacol.

Sunt, de asemenea, de amintit aparatele cu ultrasunete pentru îndepărtarea mătoarelor, gândacilor şobolanilor şi a câinilor agresivi. Totodată, în şcolile de dresaj canin sunt folosite *fluierele cu ultrasunete*.

În industria de apărare încă din al doilea război mondial se foloseau *detectoare ultrasonice* pentru depistarea submarinelor sau submersibilelor inamice. Astăzi acestea au ajuns la un grad de dezvoltare şi performanţe greu de imaginat.

Tehnologia NATO foloseşte deja echipamente ce folosesc ultrasunete, pentru interceptarea şi detonarea la *distanţă de securitate* a proiectilelor trase cu AG-uri. În interiorul avioanelor de luptă, a vedetelor rapide de navigaţie maritimă şi al submarinelor există echipamente de *control activ* cu ultrasunete ce oferă informaţii în timp real asupra stării structurilor acestora şi ale unor subansambluri de mare importanţă ce le echipează.

Securizarea anumitor sedii sau incinte „Top secret" este făcută în multe situaţii tot cu ajutorul detecţiei ultrasonice. *Orientarea vehiculelor-robot de luptă*, este, de asemenea, făcută cu echipamente ce folosesc tehnologii în domeniul ultrasonic. „Bruiajul" anumitor tipuri de radare folosite în tehnica militară sau de securitate are la bază folosirea fasciculelor ultrasonore.

B. Infrasunete

Infrasunetele sunt acele sunete ce au o frecvenţă sub pragul de audibilitate al urechii umane (0,01-16 Hz). Undele infrasonice se împrăştie în toată suprafaţa de propagare, călătoresc la mari distanţe şi sunt de neoprit. Nu este necesară o amplitudine mare a acestor unde pentru a produce efecte negative în corpul omenesc, o redusă expunere a acestuia la acest tip de sunete necesitând timpi de ordinul orelor sau chiar zilelor pentru a putea vorbi despre reversibilitatea efectelor asupra individului. Pe pământ apar infrasunete pe cale naturală sau produse de om dar din fericire manifestările extreme şi contactul cu omul sunt rare. Erupţiile naturale ale vulcanilor produc unde infrasonice. Când a explodat vulcanul Krakatoa pulverizând în atmosferă la peste 100 de mile înălţime o întreagă insulă, s-au zguduit şi spart ferestre ale caselor aflate la peste 1000 de mile de centrul erupţiei. Undele de şoc au afectat atât pământul cât şi atmosfera şi au continuat timp de câteva ore.

Undele infrasonore sunt invizibile, dar lovesc ţesuturile vitale şi structurile fizice cu o forţă foarte mare. Senzaţia este de vibraţie a organelor interne şi clădirilor, turtind efectiv obiectele lovite de acest tip de unde. În anumite locuri ele pot duce la explozia materiei!

Interesant este faptul că anumite animale comunică prin infrasunete. Elefanţii, de exemplu pot comunica la distanţe de până la 10 mile utilizând sunete cu frecvenţe cuprinse între 12-35 Hz.

Infrasunetele sunt atât de puternice încât pot fi folosite pe post de armă. Un cercetător în domeniul cetaceelor, John Cody în urma unor minuţioase cercetări a ajuns la concluzia că anumite specii de balene produc infrasunete pentru paralizarea prăzii de mari dimensiuni ca sepiile gigant şi alte specii de peşti mari.

Alte surse naturale ce produc infrasunete sunt: cutremurele, valurile tsunami, balansul ghețarilor, undele de flux, aurora boreală (0,1–0,01 Hz), vântul solar, pulsația solară, uraganele, curenții puternici de gaz, tunetele etc.

Mașinile produse de om, cum ar fi: motoare, autobuze, trenuri, motociclete și avioane pot produce infrasunete. Același John Cody notează că piloții de avion expuși vibrațiilor infrasonice suferă o diminuare a vederii, echilibrului, orientării, inteligenței și a posibilității de discernere a unor situații.

Depinzând de intensitate, infrasunetele pot cauza modificări ale presiunii arteriale, teamă, dezorientare, simptome fizice și mentale negative, explozia materiei, incapacitate sau pot chiar ucide! Cu cât frecvența ultrasunetelor scade, efectele nocive sau chiar mortale asupra organismului uman cresc. Ele perturbă funcționarea normală a urechii mijlocii și interne, producând greață, dezechilibru, balans necontrolat, imobilism și dezorientare. Expunerea chiar la doze moderate de infrasunete duce la îmbolnăvire.

Prezentăm în continuare câteva domenii de valori ale frecvențelor infrasunetelor și efectele lor asupra organismului uman:

• 7 Hz (7 cicluri/secundă). Frecvența letală pentru ființa umană! Aceasta coincide cu frecvența *ritmului alfa – median* al creierului și, de asemenea, este frecvența de rezonanță a unor organe interne printre care inima și splina. Această frecvență poate duce la ruperea efectivă a acestor organe.

• 12 Hz (12 cicluri/secundă). Walt Disney și colaboratorii săi au experimentat accidental efectul infrasunetelor asupra oamenilor. Efectele sonore ale unui desen animat ce se derulau la o frecvență normală de 60 Hz, au fost reproduse datorită unei defecțiuni a aparatului audio de redare la 12 Hz și amplificate și redate în sala de vizionare. Rezultatul a fost că după câteva zeci de secunde întreaga asistență a prezentat stări de greață și vomă, stări ce au persistat aproximativ o săptămână.

• 43–73 Hz. Percepții vizuale alterate, reducerea IQ-ului cu până la 77%, distorsionări ale orientării în spațiu, pierderea echilibrului, dificultăți de vorbire, leșin.

• 50–100 Hz (frecvențe joase, dar nu infra!). Senzații intolerabile în piept și întreaga regiune toracică, chiar cu urechile protejate. Tuse pregnantă, obstrucție hipofaringiană, dificultăți de respirație, ritm cardiac perturbat.

Aplicații ale infrasunetelor

Proporția covârșitoare a aplicațiilor infrasunetelor se regăsește în **industria militară**, unde infrasunetele sunt folosite ca *arme de distrugere în masă*, sau *arme de împrăștiere a mulțimilor turbulente prin inducerea de senzații insuportabile.*

Industria de show-bizz și cea muzicală mai folosește uneori efecte infrasonore generate cu ajutorul unor difuzoare speciale, de mare putere, în cadrul unor spectacole desfășurate în aer liber sau uneori în săli foarte mari.

Măsuri de protecţia mediului şi persoanei împotriva ultrasunetelor şi infrasunetelor

Trebuie spus că *ultrasunetele* disipate în mediul înconjurător nu sunt nocive pentru om şi mediu. Sigur că există precauţii atunci când ele sunt folosite cu anumite aparate ce folosesc proprietăţile acestora. De exemplu, la distrugerea calculilor renali, este trimis un singur impuls de impact către calcul, după care se vizualizează prin fibră optică efectul, după care este trimis următorul ş.a.m.d., tocmai pentru ca din eroare de localizare să nu fie distrus ţesut renal.

Precauţii se impun însă în cazul apariţiei necontrolate a cavitaţiei în conducte şi instalaţii hidraulice, fenomen extrem de dăunător atât acestor instalaţii cât şi personalului aflat în imediata proximitate a acestora, prin efectele pe care acest gen de avarii le pot produce.

În ceea ce priveşte *infrasunetele*, din însăşi prezentarea lor reiese limpede că acestea sunt extrem de periculoase, chiar letale pentru fiinţa umană. S-a arătat şi modalitatea de producere pe cale naturală a acestui tip de sunete şi este lesne de observat că ele rezultă mai ales în urma unor calamităţi sau fenomene naturale rare, împotriva cărora nu se poate lupta. Protecţia împotriva efectelor infrasonore este aceeaşi cu aceea împotriva calamităţilor (adăpostire în buncăre, subsoluri adânci, peşteri etc.) În ceea ce priveşte cazul în care infrasunetele sunt folosite conştient ca armă, măsura de precauţie este aceea de a nu vă afla în zona de conflict!

Se impun însă câteva precizări în legătură cu apariţia infrasunetelor la concertele rock sau alte genuri muzicale unde se folosesc staţii de amplificare şi difuzoare de mare putere şi unde nu întotdeauna organizatorii sunt conştienţi de pericolul enorm pe care folosirea unor intensităţi acustice la frecvenţe joase ale unor efecte sonore îl poate reprezenta asupra celor aflaţi în preajma difuzoarelor: surzire temporară sau definitivă, ruptură de cord sau splină, leziuni medulare ireversibile, afecţiuni temporare sau definitive ale capacităţii mentale etc.

Este aşadar de preferat ca în astfel de situaţii să evitaţi pe cât posibil vecinătatea difuzoarelor.

2.8. UNDE SEISMICE

2.8.1. Introducere

Mecanismul producerii şi propagării undelor seismice (cutremurelor) este unul destul de controversat de-a lungul istoriei acestui domeniu de cercetare a unor fenomene naturale catastrofale. Astăzi, cercetătorii de marcă sunt unanim de acord că undele seismice apar datorită interacţiunii plăcilor tectonice ale pământului, apariţiei unor fisuri în profunzimea scoarţei terestre, deplasării unor straturi în raport cu altele situate la adâncimi diferite etc. Energia eliberată prin producerea acestor „evenimente", este transmisă spre exterior sub formă de unde, cam la fel cum se întâmplă cu energia ce ia naştere prin mişcarea unei suprafeţe de apă ce se propagă sub forma unui val. La declanşarea unui cutremur este radiată energie în toate direcţiile. Aceasta circulă în interiorul scoarţei şi în jurul ei prin intermediul celor trei tipuri de unde ce iau naştere atunci când se produce un cutremur.

• *Undele primare (unde P)* sunt cele mai rapide unde care apar, având o viteză de propagare cuprinsă între 1,4-9 km/s aceasta depinzând de structura scoarței din zona de propagare. Acest tip de unde străbate zona de roci dure ale pământului dar și pungile de apă și chiar golurile (zone gazoase). Acest tip de unde produce o împingere și smulgere a rocilor, cam în același mod în care unda sonoră împinge aerul și „trece" prin el (fig. 2.39). În mod paradoxal, cu toate că acest tip de unde se propagă cel mai repede, ele produc cele mai nesemnificative pagube și sunt greu percepute de către om. S-a dovedit însă că anumite animale domestice sau sălbatice percep aceste unde și prin manifestările lor pot constitui adevărate semnale de alarmă în ceea ce privește apariția următoarelor tipuri de unde, mult mai periculoase.

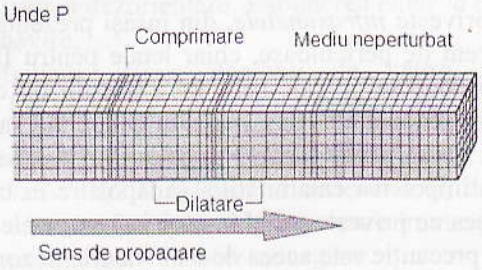


Fig. 2.39. Unde P

• *Undele secundare (unde S)* sau unde de forfecare, circulă prin straturile solide ale scoarței, neputând însă traversa straturile fluide. Viteza lor de propagare este inferioară undelor P fiind cam de 1,7 ori mai lente. Interesant că acest *raport* rămâne practic constant indiferent de structura geologică străbătută de cele două unde. Acest indiciu este folosit de seismologi pentru determinarea distanței dintre un punct oarecare de pe suprafața globului și *epicentrul cutremurului*, punctul de origine al vibrațiilor seismice. Vibrațiile variabile ce produc unda S sunt *perpendiculare* (transversale) pe direcția de propagare, fiind resimțite la suprafață ca o mișcări de forfecare – de balans în plan orizontal. Unda se propagă, precum mișcarea unui șarpe pe sol, ondulatoriu stânga-dreapta față de direcția de înaintare. Ea transportă aproximativ 80% din energia totală a cutremurului.

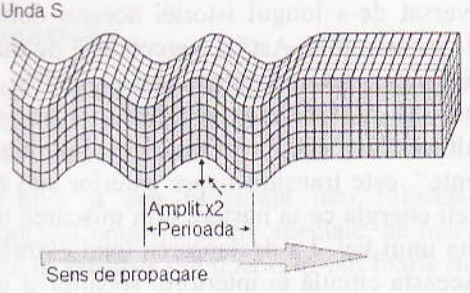


Fig. 2.40. Unde S

Ambele tipuri de unde, P şi S pot înconjura pământul, putând fi detectate pe partea opusă punctului din care a plecat unda seismică.

• *Undele de suprafață* sunt cele mai puțin rapide, dar probabil cele mai devastatoare dintre cele trei tipuri de unde seismice. Undele de suprafață circulă de-a lungul suprafeței pamântului sub forma a doua tipuri de unde: *undele Love* (unde L – sunt cele mai rapide unde de suprafață şi mişcă pământul dintr-o parte în cealaltă) şi undele Rayleigh (unde R- se propagă în jurul pământului la fel cum un val se propagă pe suprafața unui lac sau ocean. Efectul acestora este acela că pământul se mişcă în sus şi în jos şi dintr-o parte în cealaltă, pe direcția de propagare a undei). Cele mai mari amplitudini resimțite în timpul cutremurelor se datorează undelor R, a căror influență nefastă este mai puternică decât a celorlalte tipuri de unde. În figura 2.41, sunt prezentate aceste tipuri de unde:

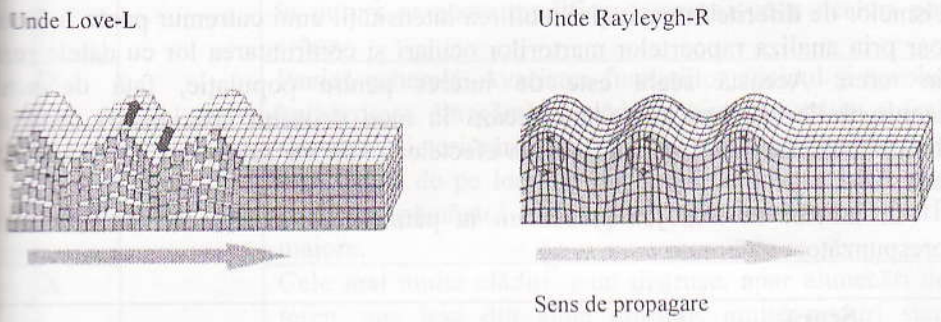


Fig. 2.41. Unde L şi R

2.8.2. Magnitudine şi intensitate. Scări de apreciere a tăriei unui cutremur

Magnitudinea unui cutremur, exprimată de obicei pe *scara Richter*, este o măsură a tăriei cutremurului sau a energiei eliberate din focar sub formă de unde seismice. Este o mărime specifică unui cutremur, şi se determină cu ajutorul instrumentelor de măsură, folosind amplitudinea maximă şi frecvența oscilațiilor, măsurată de seismografele ce înregistrează mişcările tectonice.

Intensitatea, exprimată de obicei pe *scara Mercalli modificată*, este o măsură subiectivă care descrie cât de puternic a fost simțit un şoc seismic într-un loc dat. Ea se bazează pe efectele observate ale mişcărilor produse de un cutremur asupra oamenilor, clădirilor, terenului etc.

Scara Richter a fost introdusă în anul 1935 de către cercetătorul Charles F. Richter de la California Institute of Technology care a propus această scară pentru a putea compara mărimile cutremurelor. Scara este logaritmică în aşa fel încât, spre exemplu, un cutremur de gradul 7 este de zece ori mai puternic decât unul de gradul 6, având o energie de 30 de ori mai mare. Cutremurele cu magnitudine mai mică decât 2 sunt catalogate ca fiind *microcutremure*, acestea putând fi sesizate doar de seismografele sensibile locale. Cutremurele cu magnitudinea mai mare sau

egală cu 4,5 grade sunt suficient de mari pentru a putea fi înregistrate de seismografele sensibile de pe întreaga suprafață a pământului și, de asemenea, pentru a putea fi simțite de către oameni în cele mai frecvente situații. Cutremurele a căror magnitudine depășește valoarea 6 pe scara Richter sunt considerate *cutremure mari* iar cele care egalează sau depășesc valoarea 8 sunt considerate *cutremure catastrofale*. Teoretic scara Richter nu are o limită superioară. Totuși, cel mai mare seism înregistrat vreodată pe pământ a avut 8,8 grade pe scara Richter.

Scara Mercalli modificată este rezultatul scării elaborate de Mercalli în 1902 și a modificărilor survenite ulterior. Ea cuprinde 12 niveluri crescătoare de intensități seismice, notate de regulă cu cifre romane, de la mișcări imperceptibile la distrugeri catastrofale și modificări ale reliefului terestru, neavând o bază matematică ci fiind bazată pe observații asupra efectelor survenite în urma seismelor de diferite intensități. Stabilirea intensității unui cutremur poate fi făcută doar prin analiza rapoartelor martorilor oculari și confruntarea lor cu datele reale din teren. Această scară este de interes pentru populație, față de scara magnitudinilor Richter (care interesează în mod deosebit specialiștii) deoarece oferă o imagine mai completă asupra efectelor reale ale seismului într-o anumită zonă.

În tabelul de mai jos prezentăm în paralel cele două scări cu corelațiile corespunzătoare aferente:

Scară		Descriere
Mercalli	Richter	
I	0-4,3	Vibrațiile sunt înregistrate doar de aparatură. Oamenii nu percep nici o mișcare.
II		Oamenii aflați în repaus la niveluri mai înalte ale clădirilor simt mișcările.
III		Zguduitura se simte la interior. Obiectele agățate se balansează. Cei aflați înăuntrul clădirilor simt zguduitura, cei aflați în exterior nu realizează că se produce un cutremur.
IV	4,3-4,8	Vasele zăngăne, majoritatea oamenilor aflați în interior simt mișcarea, copacii încep să se scuture, obiectele ce atârnă se balansează, ferestrele, ușile și vasele de bucătărie zăngăne, anumiți oameni aflați în exterior pot simți mișcarea.
V		Ușile intră în balans, lichidele părăsesc recipientele, cei ce dorm se trezesc. Aproape toți simt mișcarea. Tablourile se mișcă pe pereți, vasele de bucătărie se sparg, obiectele mici se deplasează, copacii se pot scutura.
VI	4,8-6,2	Mersul oamenilor devine instabil. Ferestrele se sparg,

		tablourile cad de pe pereți. Toți percep cutremurul, mobilele se mișcă, pot apărea fisuri în pereți, deteriorări ale clădirilor sărăcăcioase. Nu apar deteriorări majore.
VII		Dificultăți de ortostatism. Cărămizi, blocuri de BCA sau panouri pot cădea. Clopotele bisericilor bat singure, avarii reduse la clădirile bine construite, deteriorări importante la clădirile paupere. Șoferii își simt mașinile „dansând" pe șosea.
VIII	6,2-7,3	Direcția autoturismelor afectată. Coșurile se prăbușesc, ramurile copacilor se rup, casele cu fundație puțin adâncă pot fi ridicate de pe fundație, structurile înalte cum ar fi turnurile și coșurile se unduiesc și se prăbușesc. Clădirile paupere suferă stricăciuni severe. Nivelul apei în puțuri se poate modifica, versanții unor dealuri pot crăpa.
IX		Panică generală. Avarierea fundațiilor, nisipul și noroiul bolborosesc din pământ, clădirile bine construite suferă serioase deteriorări, casele cu fundații slabe se deplasează de pe locurile lor, unele conducte subterane se sparg, pământul se crapă, rezervoarele suferă avarii majore.
X		Cele mai multe clădiri* sunt distruse, apar alunecări de teren, apa iese din albia râurilor, multe poduri sunt avariate, apar crăpături pe suprafețe mari, căile rutiere se înclină ușor.
XI	7,3-8,9	Căile rutiere se înclină haotic și semnificativ, drumurile se rup, crăpături mari apar pe suprafețe considerabile, stâncile cad, cele mai multe clădiri sunt în colaps, rețeaua de conducte subterane este distrusă.
XII		Distrugere totală. „Faldurile" undelor seismice sunt vizibile la suprafața solului. Schimbarea cursului râurilor. Schimbarea peisajului și reliefului. Aproape totul este distrus. Obiectele sunt aruncate în aer. Cantități uriașe de rocă se deplasează.

*) Clădirile prevăzute cu dispozitive antiseismice și tehnologie aferentă, pot rezista la magnitudini ce depășesc 8,5 grade pe scara Richter.

2.8.3. Măsuri de prevenire și protecție împotriva efectelor seismice

Datorită victimelor pe care le fac și a imenselor pagube materiale produse, cutremurele au început să fie studiate științific în mod foarte serios cu deosebire în ultima sută de ani, când datorită înțelegerii fenomenului au fost elaborate metode și sisteme din ce în ce mai performante de *atenționare a iminenței declanșării*

cutremurelor şi de *combatere a efectelor acestora*, stabilindu-se de-a lungul timpului, datorită experienţei acumulate, adevărate *coduri comportamentale în timpul cutremurelor şi după încetarea acestora.* Există astăzi hărţi elaborate cu mare rigurozitate ce indică zonele de risc seismic ridicat de pe glob, rata producerii unui seism în fiecare zonă de risc, tipul cutremurelor ce se produc (de mare, medie sau mică adâncime, ultimele fiind cele mai periculoase), precum şi o estimare probabilistă a datei şi magnitudinii următorului seism.

Plecând de la aceste premise, statele aflate în zone de risc seismic major şi-au construit aşa-numitele *sisteme de avertizare seismică*, prescurtat **SAS** ce într-un timp real, cuprins între 15–60 secunde, de la apariţia undei *P* şi până la apariţia undei distrugătoare S – în fapt debutul cu implicaţii importante al cutremurului, poate genera o avertizare ce coroborată cu o informare şi educare corespunzătoare a populaţiei pot conduce la salvarea multor vieţi omeneşti şi evitarea multor dezastre. Timpul de prevenire este reprezentat tocmai de decalajul temporal produs de diferenţa de viteză între unda *P* şi unda *S*.

România, din punct de vedere seismic, reprezintă un caz particular. Seismicitatea în scoarţă este distribuită variat de-a lungul majorităţii teritoriului, cu magnitudini de obicei mici (M<5,5), pe când epicentrele de seismicitate adâncă sunt concentrate într-o arie restrânsă, regiunea Vrancea. Adâncimile acestor cutremure se produc într-un interval cuprins între 70-200 km. Magnitudinile lor pot ajunge până la M=8, aşa cum se presupune că a fost cutremurul din 1802. Riscul pentru Bucureşti este aproape în întregime datorat cutremurelor de adâncime intermediară din regiunea Vrancea. În ultimii 66 de ani, Romania a suferit cutremure de pământ puternice, cu epicentrul în Vrancea dintre care sunt de consemnat:

- 10 noiembrie 1940 (M=7,7; adâncime 160 km);
- 4 martie 1977 (M=7,5; adâncime 100 km);
- 30 august 1986 (M=7,2; adâncime 140 km);
- 30 mai 1990 (M=6,9; adâncime 80 km).

Aria de producere a evenimentelor de natură seismică în Vrancea are dimensiunile de 30x70 km, iar distanţa faţă de Bucureşti este de aproximativ 130 km. În aceste condiţii, timpul de avertizare pentru toate cutremurele de adâncime medie ar fi de aproximativ 25 de secunde, timp suficient ca o populaţie şi agenţi de utilităţi publice, precum şi alţi factori din domenii de risc instruiţi, să-l folosească pentru a diminua la maximum pierderile de vieţi şi distrugerile majore. Astfel, în acest interval se pot opri furnizările de gaz, electicitate şi apă, se pot întrerupe activităţile reactoarelor nucleare şi chimice, se pot opri în condiţii de securitate a comunităţilor umane activităţi industriale în metalurgie, industrie grea, chimică, transporturi etc.

În principiu, un SAS trebuie să conţină următoarele elemente:

- sistem de monitorizare compus din mai mulţi senzori;
- legături de comunicaţii în timpi reali pentru transmiterea datelor de la senzori la computer;

– unitate de procesare pentru convertirea datelor achiziționate;
– sistem de producere și comunicare radio a alarmei seismice.

În ceea ce privește comportamentul oamenilor în timpul cutremurelor, s-a dovedit că așa cum se manifestă el și în fața altor dezastre, acesta este unul *instinctual* – prima reacție fiind aceea de a fugi din interiorul clădirilor, de a aglomera scările, ascensoarele, ieșirile de urgență. A face așa ceva dezordonat, în panică și după ce a început cutremurul, poate fi fatal. Având la dispoziție timpul de avertizare și o organizare fără fisură, evacuările și/sau adăpostirile în locuri sigure sau mai puțin expuse devin posibile.

În ultimii ani industria de construcții civile și industriale s-a orientat tot mai hotărât spre găsirea unor tehnologii și tehnici de construcție care să producă structuri tot mai rezistente la acțiunile seismelor sau, care să atenueze prin dispozitive speciale efectele produse de seisme asupra construcțiilor. În țări profund afectate de activitatea seismică precum Japonia, anumite țări din Indochina, S.U.A., Mexicul și altele, cercetarea științifică și producerea de tehnologie performantă au condus către găsirea unor soluții constructive ingenioase, unele dintre ele *inteligente* ce folosesc *atenuatori de undă seismică* înglobați în structura de rezistență a unor clădiri de importanță mare, plasate în zone de risc seismic ridicat. Acestea din urmă au sistem propriu de avertizare si *comportament adaptiv* al atenuatorilor astfel încât efectele unui cutremur de magnitudine 7,7–8 sunt reduse la cele ale unuia de 5,5–6 pe scara Richter!

Menționăm că și în România există preocupări pentru producerea de clădiri dotate cu astfel de dispozitive, recent, o lucrare de acest gen a unui colectiv de cercetători din București fiind premiată cu medalia de aur la Salonul de Invenții de la Geneva, în 2006.

În final, prezentăm în figura 2.42, efectul dezastruos pe care un cutremur de mare magnitudine îl poate avea asupra unei clădiri obișnuite.

Fig. 2.42. Colapsul unei clădiri în urma unui cutremur de magnitudine 7,7 pe scara Richter

CAPITOLUL 3

OSCILAȚII ȘI UNDE ELECTROMAGNETICE

3.1. CIRCUITE DE CURENT ALTERNATIV

Introducere

Utilizarea energiei electrice a început cu pași firavi, întrucât o problemă dificil de rezolvat o reprezenta producerea acestei energii. S-au utilizat pentru început surse chimice de curent continuu – elementele galvanice – foarte scumpe și incomode. Apoi au fost inventate metode electromagnetice de producere a curentului electric, utilizând energia mecanică. Deși în aceste mașini apărea – prin inducție – un curent alternativ, dezideratul inginerilor era să se genereze curent continuu. Drept urmare, au fost inventate dispozitive mecanice (ingenioase, dar cu o fiabilitate relativ modestă) menite să transforme, direct în generator, curentul alternativ în curent continuu. De ce continuu? Răspunsul este simplu: până la momentul respectiv (finele secolului al XIX-lea, începutul secolului al XX-lea), toate dispozitivele electrice erau concepute și calculate să funcționeze în c.c. (curent continuu). Probleme, din ce în ce mai mari, au apărut odată cu extinderea rețelelor de transport și distribuție a energiei electrice. Puterile instalate, din ce în ce mai mari, impuneau intensități foarte mari pentru transport, deci conductoare mai groase pentru a micșora pierderile. Consumatorii publici și casnici utilizau tensiuni modeste (120 V), în timp transportatorii de energie ar fi preferat tensiuni mari, pentru micșorarea intensității. Inventarea transformatorului electric de curent alternativ (c.a.) a rezolvat această contradicție. Pentru transport se mărește foarte mult tensiunea, micșorându-se corespunzător intensitatea, deci și pierderea de energie prin efect Joule. La consumator, tensiunea este coborâtă la valoarea dorită. Astfel, au devenit posibile producerea, transportul, distribuirea și utilizarea energiei electrice la o scară continentală.Trecerea la curentul alternativ s-a realizat relativ ușor. Cu puține excepții, toate dispozitivele care utilizau c.c. puteau funcționa și în c.a. În schimb au fost concepute mașini specifice de c.a. – mai ales generatoare și motoare – foarte simple, foarte ușor de întreținut și deosebit de fiabile.

Treptat, pe măsură ce erau studiate rețelele de c.a., au fost descoperite și inventate alte aplicații și modalități de producere a curentului alternativ. La ora actuală, curentul alternativ este stăpân în energetică și comunicații.

3.1.1. Regimul staționar și cel nestaționar

Pentru a înțelege mai bine fenomenele legate de curentul alternativ, trebuie să ținem cont de faptul că acest curent își modifică în permanență intensitatea, tensiunea și sensul de circulație. De exemplu, tensiunea de la rețeaua din apartamentul vostru se modifică după legea $u(t)=310\cdot\sin(100\cdot\pi\cdot t)$; ($u$ exprimat în V, t în s). Această variație permanentă a tensiunii atrage după sine și modificarea corespunzătoare a intensității.

Cum reacționează un circuit la variația permanentă a tensiunii? Reușește circuitul să urmărească aceste schimbări? În ce mod? Au oare toate circuitele aceeași comportare?

La aceste întrebări, și la multe altele, vom căuta răspunsuri în cele ce urmează.

Dacă vom considera un circuit electric simplu, ca cel din figura 3.1, putem distinge patru situații în funcție de starea și „preistoria" întrerupătorului K:

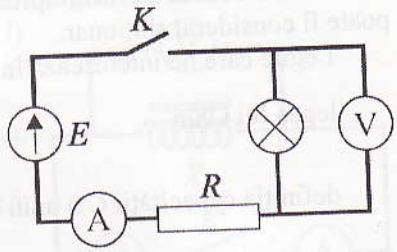


Fig. 3.1. Studiul regimului tranzitoriu pentru bec

a) K fiind în starea „0" (deschis) vom avea $I = 0$, $U = 0$ în permanență. Acesta va fi un ***regim staționar***.

b) Aducem întrerupătorul în starea „1" (închis). Tensiunea și intensitatea vor avea un salt brusc („o treaptă"). În acest moment curentul începe să circule, temperatura filamentului becului începe să crească și, odată cu ea, se mărește și rezistența sa electrică R. Drept urmare intensitatea curentului se micșorează treptat. Tensiunea la bornele becului ($U = E - IR$) va crește, din cauza scăderii intensității. Aceste modificări vor continua până când filamentul atinge temperatura maximă (aproximativ 0,1 – 1s, în funcție de puterea becului, de tensiunea sa nominală și de tensiunea aplicată). Procesul descris reprezintă ***regimul tranzitoriu (nestaționar)*** al circuitului.

c) După cca 1s de la închiderea întrerupătorului I și U *se vor stabiliza*, circuitul intrând în ***regim staționar***. Dacă în continuare nu se vor produce modificări în circuit, circuitul va rămâne în acest regim un timp nelimitat.

d) Când deschidem întrerupătorul, inițiem un nou ***proces tranzitoriu***, oarecum invers față de b), cu o durată mult mai mică ($<10^{-3}$s) în ceea ce privește fenomenele electrice (scăderea bruscă a intensității etc.). Fenomenele termice vor avea însă o durată ce depășește 1s, dar ele nu pot influența comportarea electrică a sistemului, circuitul fiind întrerupt. Mai departe regimul este din nou staționar ca în situația a).

Observație. *Comportamentele descrise (pentru intensitate și tensiune) sunt vizibile în orice situație – adică pentru orice bec – dacă în locul voltmetrului și al ampermetrului se utilizează un osciloscop cu două spoturi cum se arată în figura 3.4. în conformitate cu figura 3.1, rezultate va da doar un bec auto de 55 W 12 V (pentru far).*

3.1.2. Revizuirea unor noțiuni din electrocinetică
(curentul electric staționar)

În clasa a X-a au fost enunțate o serie de legi pentru circuitele electrice. Circuitele erau considerate ca fiind ***liniare*** și aflate ***în regim staționar***. **Liniaritatea** subînțelege faptul că proprietățile corpurilor sunt independente de situația în care se află acestea (dimensiunile, rezistivitatea etc. nu depind de temperatură, tensiune, intensitate etc.), iar **staționaritatea** are în vedere faptul că în circuitele electrice nu au loc modificări în timp ale parametrilor. Este evident că aceste ipoteze reprezintă o idealizare. În practică sunt dese situațiile în care circuitele electrice se află aproape de liniaritate, iar regimul lor de funcționare poate fi considerat staționar.

Legile care ne interesează în acest moment sunt:

legea lui Ohm $$\frac{U}{I} = const = R \qquad (3.1)$$

definiția capacității C a unui condensator $$\frac{Q}{U} = const = C \qquad (3.2)$$

și definiția inductanței L a unei bobine $$\frac{\Phi}{I} = const = L \qquad (3.3)$$

Aceste legi descriu comportarea liniară a rezistorului, condensatorului și a bobinei în regim staționar.

Observație. *Relația (3.1) trebuie înțeleasă astfel: pentru o porțiune de circuit dată, tensiunea U și intensitatea I sunt direct proporționale ($U \sim I$), constanta de proporționalitate fiind rezistența R a circuitului. În nicium caz* ***nu trebuie înțeleasă astfel: rezistența este proporțională cu tensiunea și invers proprorțională cu intensitatea.*** *(Rezistența, $R = \rho \frac{l}{S}$, este direct proporțională cu lungimea și invers proporțională cu aria secțiunii.)*

Legea lui Ohm poate fi considerată valabilă pentru conductoare a căror temperatură (deci și rezistență) nu se modifică în mod sensibil datorită circulației curentului electric. Pentru aceste cazuri legea lui Ohm este valabilă și în timpul desfășurării proceselor tranzitorii, întrucât rezistența electrică va fi independentă de valorile tensiunii sau ale intensității. Astfel de conductoare vor fi considerate rezistori ohmici (ideali). În continuare vom considera că rezistorii sunt ideali. Proprietățile condensatorilor obișnuiți nu depind în mod sensibil de tensiunile aplicate, deci pot fi considerați liniari. Bobinele cu miez feromagnetic au, în general, o comportare profund neliniară, din cauza fenomenului de histerezis magnetic (memorie). Dacă inducția magnetică din miez nu este prea mare (intensitate mică a curentului) se poate considera că inductanța bobinei respective este constantă în raport cu I și deci bobina va avea o comportare liniară.

3.1.3. Comportarea rezistorului, bobinei şi a condensatorului în curent continuu staţionar

ACTIVITATE EXPERIMENTALĂ

Studiul comportării rezistorului, bobinei şi condensatorului în c.c. staţionar

Materialele necesare

1. alimentator – (sursă de curent continuu şi alternativ 4 – 30V)
2. o bobină cu 1000 de spire (2 × 500) fără miez magnetic din trusa de liceu
3. miez magnetic complet pentru bobină ($U + I$)
4. două condensatoare cu capacităţile de 50 şi 100 μF
5. ampermetru cu scale de 1A= (pentru c.c.); 1A~ şi 100mA~(pentru c.a.)
6. voltmetru cu scale de 10V= (pentru c.c.); 30V~ (pentru c.a.)
7. întrerupător, conductoare cd legătură.

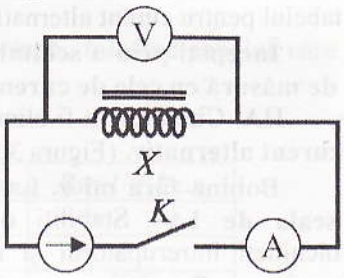


Fig. 3.2. Verificarea legii lui Ohm pentru bobină (cu miez)

Modul de lucru

Etapa I – curent continuu

IA. Se leagă în serie bobina (fără miez) - (X), ampermetrul şi întrerupătorul şi se alimentează circuitul astfel obţinut la o tensiune *continuă* de 6 V ca în figura 3.2. După închiderea întrerupătorului, se măsoară şi se notează valorile obţinute pentru U şi I. Se repetă măsurătorile pentru 8 şi 10 V.

Se introduce miezul în bobină şi se repetă măsurătorile.

IB. În circuitul de la IA se introduce un condensator în serie cu bobina (cu sau fără miez), voltmetrul fiind legat la bornele condensatorului

Se stabileşte o tensiune de 6 V. Se închide întrerupătorul şi se notează tensiunea şi intensitatea. Se repetă măsurătorile pentru tensiunea de alimentare de 8 şi 10 V.

Observaţie

Aveţi grijă să respectaţi polaritatea condensatorului, dacă acesta este electrolitic polarizat: ***legaţi borna condensatorului marcată „+" spre polul pozitiv al sursei.*** *Verificaţi tensiunea de lucru a condensatorului: trebuie să fie cel puţin 12 V. În caz contrar* ***condensatorul poate exploda!***

Datele experimentale se vor nota într-un tabel, asemănător celui de mai jos:

Element	U (V)	I (A)	$R = U/I$ (Ω)
Bobină fără miez			
Bobină cu miez			
Condensator			

Concluzii:

IA. Bobina respectă legea lui Ohm, rezistența sa electrică fiind aceeași în cele două cazuri (rezistența electrică a bobinei nu depinde de prezența sau absența miezului).

IB. Condensatorul reprezintă o întrerupere de circuit!

Dacă veți fi mai atenți, veți constata un „puls" al intensității în momentul închiderii întrerupătorului! De asemenea, după deschiderea lui, veți remarca scăderea treptată a tensiunii de pe condensator. De ce?

Etapa a II-a - curent alternativ

Datele obținute în această etapă le notați în tabelul pentru curent alternativ.

Începeți prin a schimba scalele aparatelor de măsură cu cele de curent alternativ!

IIA. Circuitul va fi alimentat de la ieșirea de **curent alternativ.** (Figura 3.3)

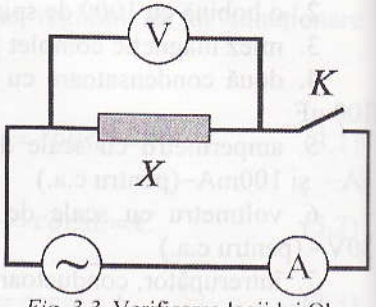


Fig. 3.3. Verificarea legii lui Ohm în curent alternativ.

Bobina fără miez. La ampermetru folosiți scala de 1A~. Stabiliți o tensiune de 6 V. Închideți întrerupătorul și notați intensitatea și tensiunea. Repetați pentru tensiunea de 8 V și apoi de 10 V.

Bobina cu miez. Înlocuiți scala de 1A~ a ampermetrului cu cea de 100mA~.

Introduceți miezul în bobină. Stabiliți tensiunea de alimentare la 12 V. Închideți întrerupătorul și notați valorile tensiunii și a intensității. Repetați pentru 16 și 20 V.

Veți observa imediat că, deși tensiunea este mai mare decât în etapa I, intensitatea este mult mai mică! Este posibil ca intensitatea să fie greu de măsurat. În acest caz puteți proceda la mărirea tensiunii de alimentare, până la 20-30V. Repetați măsurătorile, după ce scoateți piesa în formă de "*I*" a miezului magnetic (miezul are formă de $U + I$). Datele pe care le colectați, le introduceți într-un rând separat : Bobină fără "I".

IIB. Puneți unul din condensatoare (50μF) în locul bobinei. La ampermetru utilizați scala 100mA~.

Stabiliți tensiunea de alimentare 4 V. Închideți pentru scurt timp întrerupătorul și notați valorile U și I în rubrica „Condensator 1". Măriți tensiunea de alimentare la **8 V** și repetați măsurătorile.

Durata măsurătorilor trebuie să fie scurtă (2 – 4 s) pentru a evita distrugerea condensatorului. Puneți al doilea condensator în paralel cu primul și reluați măsurătorile, datele revenind rubricii: Condensator 2.

Tabel curent alternativ

Element	U (V)	I (A)	$R = U / I$ (Ω)
Bobină fără miez			
Bobina cu miez			
Condensator 1			
Condensator 2			

Comparați rezultatele măsurătorilor celor două etape, folosind tabelul care urmează:

Tabel comparativ

Element	$R = U / I$ c.c	$R = U / I$ c.a
Bobină fără miez		
Bobină cu miez complet		
Bobină fără "I"		
Condensator 1		
Condensator 2		

Concluzii:

1. Rezistorul are aceeași rezistență în c.a. și în c.c.

2. Bobina are o „rezistență" U/I mai mare în c.a. decât în c.c., iar valoarea acesteia depinde de prezența și configurația miezului magnetic.

3. Condensatorul nu mai reprezintă o întrerupere de circuit în c.a., „rezistența" condensatorului depinzând de capacitatea sa (scade la creșterea capacității).

3.1.4. Studiul experimental calitativ al comportării rezistorului, bobinei și a condensatorului în regim variabil (tranzitoriu)

Pentru vizualizarea și urmărirea proceselor ce au loc în rețelele de curent alternativ (și nu numai) sunt utilizate aparate electronice specializate. Aparatele de măsură electromagnetice ar putea fi utilizate doar pentru frecvențe mici (sub 10 Hz).

Cauzele acestei limitări sunt două inerții: una mecanică – a aparatelor (nu pot „ține pasul" cu schimbările produse în circuit) și a doua – fiziologică (ochiul nu poate sesiza mișcările prea rapide ale acului indicator). Unul dintre aparatele utilizate pentru o plajă foarte largă de frecvențe este osciloscopul catodic, al cărui principiu de funcționare a fost expus în manualul de clasa a X-a.

Cu ajutorul unui **osciloscop** catodic cu două spoturi (sau un osciloscop simplu prevăzut cu un comutator electronic de canale) se pot urmări simultan două (sau mai multe) semnale electrice.

În locul osciloscopului se poate folosi un **computer.** Există multe programe ce permit măsurători, vizualizări şi prelucrări ale semnalelor electrice inaccesibile osciloscoapelor didactice. Nu sunt necesare dispozitive speciale sau modificări de hard. Se utilizează intrarea în placa de sunet a calculatorului, pe două canale (stereo). Este necesar un cablu stereo, prevăzut la un capăt cu jakul corespunzător, la celălalt capăt fiind ataşate sondele cu care se preiau semnalele electrice din reţeaua studiată.

Semnal electric *- o tensiune electrică (în general variabilă în timp) provenită de la o sursă sau de la o porţiune oarecare de circuit. Prin mărimea sa, (prin comportarea în timp a valorii, a polarităţii, duratei etc.) acesta oferă informaţii despre sursa în cauză. Semnalul electric poate fi şi un purtător de informaţie, dacă i se modifică (modulează) într-un mod anume caracteristicile (semnal modulat).*

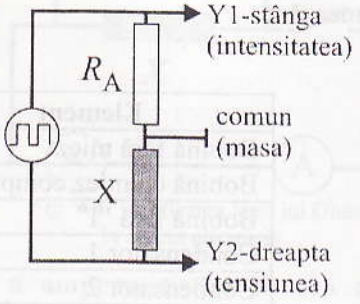


Fig. 3.4. Vizualizarea tensiunii şi a intensităţii în procesele tranzitorii

Pentru vizualizarea fenomenelor tranzitorii se utilizează un generator de impulsuri dreptunghiulare (fig. 3.4). În această schemă, rezistorul R_A ($\approx$ 100 Ω) joacă rolul ampermetrului. Semnalul „cules" de pe acest rezistor este aplicat intrării „1" (stânga) a osciloscopului şi **inversat**. (*Inversarea acestui semnal este utilă, dar nu obligatorie. Este utilă întrucât, în raport cu masa, punctele Y1 şi Y2 au polarităţi opuse şi, în consecinţă, curba intensităţii ar ieşi „răsturnată", faţă de cea a tensiunii vezi fig. 3.5.*). Semnalul corespunzător tensiunii, cules de pe X, se aplică intrării „2" (dreapta). Sincronizarea osciloscopului este comutată în poziţia „internă". Amplificarea semnalelor se alege pentru început la un nivel mic şi apoi se reglează după caz, astfel încât semnalele să fie bine vizibile, dar să nu fie deformate. *(Deformarea are loc la amplificări mari şi se manifestă prin „tăierea" sau „aplatizarea" vârfurilor. Tăierea semnalelor poate fi vizibilă şi evidentă doar în cazul bobinei şi a condensatorului la care apar vârfuri de curent sau tensiune.)*

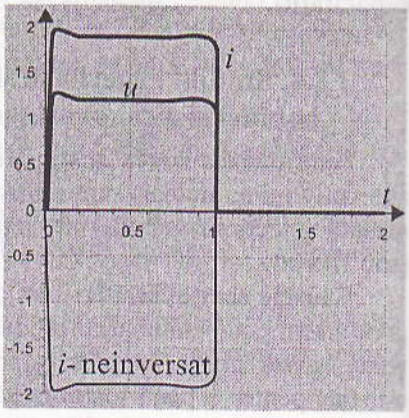


Fig. 3.5. Regimul tranzitoriu în cazul rezistorului

În calitate de X, se iau pe rând: un rezistor (bobina fără miez), o bobină (bobina cu miez) şi un condensator.

Se urmăresc imaginile de pe ecranul osciloscopului concentrând atenția asupra aspectelor ce apar la creşterea şi descreşterea tensiunii aplicate. (Echivalentul închiderii şi deschiderii întrerupătorului din figura 3.1.) Oscilogramele ce se obțin sunt ilustrate în figurile 3.5 – 3.7, în care s-a aplicat inversarea lui i (fig. 3.5 arată şi i neinversat).

Rezistorul (fig. 3.5). Observăm creşterea şi descreşterea simultană a tensiunii şi a intensității, fără nicio deosebire (sunt direct proporționale).

Bobina (fig. 3.6). La început tensiunea are un salt brusc (*apare prima*), în timp ce intensitatea este practic 0 (*întârzie să apară*). ***Intensitatea rămâne în urma tensiunii.*** Treptat intensitatea creşte. Când intensitatea atinge valoarea maximă, tensiunea devine constantă.

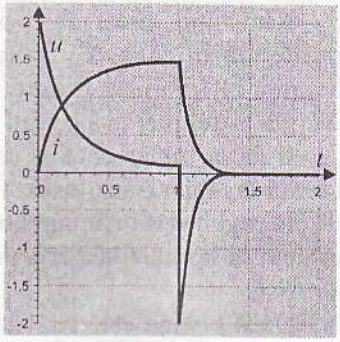


Fig. 3.6. Regimul tranzitoriu pentru bobina reală

Condensatorul (fig. 2.7). La apariția impulsului de tensiune dat de generator, intensitatea curentului are o creştere bruscă. Condensatorul începe să se încarce dar, în primul moment, tensiunea este practic 0. **Apare deci mai întâi intensitatea şi apoi, cu întârziere, tensiunea.** Situația este oarecum asemănătoare cu cea de la bobină, rolurile tensiunii şi intensității fiind însă inversate.

Concluzii:

1. **Rezistorul nu introduce decalaj între intesitate şi tensiune.**
2. **În cazul bobinei intensitatea curentului întârzie față de tensiune.**
3. **Condensatorul introduce o întârziere a tensiunii față de intensitate.**
4. **Comportările tensiunii şi intensității la condensator sunt inverse față de bobină.**

3.1.5. Explicarea constatărilor experimentale

Observație. *În cele ce urmează vom nota cu litere cursive mici valorile instantanee (în general variabile în timp) ale intensității, tensiunii, sarcinii etc. (i, u, q)*

Rezistorul în regim tranzitoriu se comportă la fel ca şi în regimul staționar: intensitatea este direct proporțională cu tensiunea, indiferent de comportarea intensității (creşte, scade sau nu se modifică).

$$\frac{u}{i} = \frac{\Delta u}{\Delta i} = R \qquad (3.4)$$

Acest fapt se explică foarte simplu: curentul electric apare ca urmare a mişcării ordonate a electronilor din conductor. Această mişcare se declan-

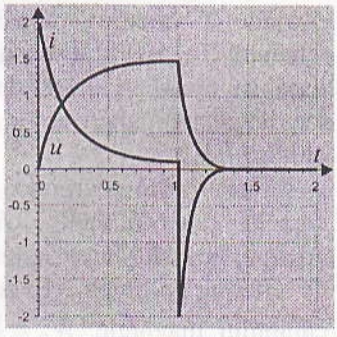


Fig. 3.7. Încărcarea şi descărcarea condensatorului (regim tranzitoriu)

şează „instantaneu" în toată „masa" electronilor atunci când apare o diferenţă de potenţial (la fel ca şi mişcarea apei într-o conductă, când se deschide robinetul). *„Informaţia" despre deschiderea robinetului (micşorarea presiunii la un capăt al conductei) reprezintă o perturbaţie. Această perturbaţie se transmite în masa apei din conductă, sub forma unei unde elastice, cu viteza sunetului (pentru apă – aprox. 1,4 km/s). Avem senzaţia că începerea curgerii se declanşează instantaneu. În conductoarele electrice, informaţia despre modificarea unui potenţial se transmite prin intermediul câmpului electromagnetic, cu viteza luminii (300 000 km/s)...*

Rezistorul preia în permanenţă energie de la generatorul electric şi o transformă în căldură. Această căldură este corespondentul electric al lucrului mecanic al forţei de frecare din hidrodinamică (prin care se degajă tot căldură). Energia astfel preluată o vom numi **energie activă.**

Bobina, chiar dacă o considerăm fără rezistenţă (*ideală*), are o comportare diferită în regim tranzitoriu, faţă de cea din regimul staţionar.

În regim staţionar curentul electric străbate bobina ideală fără a da naştere unei tensiuni la bornele acesteia ($U_L = 0$, $I_L = \text{const} \neq 0$), pentru că nu există rezistenţă electrică.

Dacă bobina este străbătută de un curent variabil, fluxul magnetic propriu al bobinei va fi şi el variabil. În consecinţă se generează tensiunea electromotoare de autoinducţie:

$$e_a = -L\frac{\Delta i_L}{\Delta t} \tag{3.5}$$

în care $\frac{\Delta i_L}{\Delta t}$ reprezintă *viteza de variaţie a intensităţii* curentului prin bobină.

În raport cu sensul în care circulă curentul prin bobină, la bornele acesteia se produce o cădere de tensiune opusă t.e.m. de autoinducţie:

$$u_L = -e_a = L\frac{\Delta i_L}{\Delta t} \tag{3.6}$$

Trebuie subliniat faptul că valoarea tensiunii u_L, ce apare în acest caz, nu depinde de valoarea intensităţii i_L, ci de viteza cu care acesta variază. Polaritatea tensiunii (în raport cu sensul curentului) este dată de comportarea intensităţii: $u_L>0$, dacă ea creşte şi $u_L<0$, dacă scade. Dacă bobina prezintă şi rezistenţă R_b, are loc însumarea algebrică a tensiunii provocate de autoinducţie u_L cu tensiunea ohmică $i_L R_b$.

Raporturile energetice pe care le are bobina cu reţeaua (generatorul) au un caracter reactiv: atunci când intensitatea curentului creşte – bobina primeşte energie, iar când intensitatea începe să scadă – bobina reacţionează cedând excesul de energie în reţea. (Energia primită este acumulată sub formă de energie a câmpului magnetic: $W_B = \frac{1}{2}Li_L^2$. Această energie este similară energiei cinetice $mv^2/2$.)

Condensatorul, prin construcţie, reprezintă o întrerupere de circuit. În regim staţionar, prin el nu circulă curent ($I_c = 0$, $U_c = \text{const} \neq 0$). În cazul în care dorim să

modificăm tensiunea aplicată condensatorului (regim variabil), va trebui schimbată în mod automat sarcina $q_c=Cu_c$ a acestuia, prin intermediul unui curent de încărcare sau de descărcare:

$$i_c = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\Delta(Cu_c)}{\Delta t} = C\frac{\Delta u_c}{\Delta t} \tag{2.7}$$

Mai întâi apare curentul şi abia apoi tensiunea, pe măsură ce se acumulează sarcina. Intensitatea acestui curent nu depinde de valoarea tensiunii ci de viteza de variaţie a acesteia. Sensul curentului depinde de comportarea tensiunii u_c aplicate condensatorului: $i_c>0$ când u_c creşte şi $i_c<0$ când u_c scade. Din aceste motive, condensatorul are şi el o comportare reactivă: primeşte sau cedează energie după cum tensiunea creşte sau scade. (Energia este acumulată sub formă de energie a câmpului electric din condensator: $W_E = \frac{1}{2}Cu_c^2 = \frac{1}{2}\frac{q_c^2}{C}$. ($W_E$ este echivalentul electric al energiei potenţiale elastice $kx^2/2$.)

3.1.6 Comportarea în curent alternativ

După cum s-a învăţat în clasa a X-a, curentul alternativ este un curent căruia îi **variază parametrii în mod periodic**. Spre exemplu tensiunea electromotoare e:

$$e(t) = E_{\max}\sin(\omega t + \varphi_e)$$

unde: $e(t)$ este **valoarea instantanee** a t.em. la un moment de timp t, E_{max} – valoarea sa maximă (**amplitudinea**), ω – **pulsaţia** t.em., iar φ_e – **faza iniţială** a acesteia.

Într-un mod absolut asemănător poate fi descrisă comportarea în timp a tensiunii u:

$$u(t) = U_{\max}\sin(\omega t + \varphi_u), \tag{2.8}$$

sau a intensităţii:

$$i(t) = I_{\max}\sin(\omega t + \varphi_i). \tag{2.9}$$

Diferenţa

$$\varphi_u - \varphi_i = \varphi \tag{2.10}$$

dintre faza iniţială a tensiunii şi cea a intensităţii reprezintă **defazajul dintre tensiune şi intensitate**. Evident, la fel de bine, se poate exprima şi defazajul invers, dintre intensitate şi tensiune $\varphi_i - \varphi_u$. De cele mai multe ori, una dintre fazele iniţiale φ_i *sau* φ_u va fi considerată nulă.

Periodicitatea acestor mărimi fizice decurge din faptul că, spre exemplu, t.e.m. e se obţine dintr-o mişcare de rotaţie uniformă de viteză unghiulară ω.

Reamintim că, între viteza unghiulară ω a unei mişcări de rotaţie (pulsaţia mişcării oscilatorii) şi perioada T (frecvenţa υ) a acesteia, există relaţia:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\upsilon. \tag{2.11}$$

Curentul electric alternativ industrial are frecvenţa de 50 Hz (Europa, Asia continentală) sau 60 Hz (America, Japonia). În mod curent se întâlnesc frecvenţe

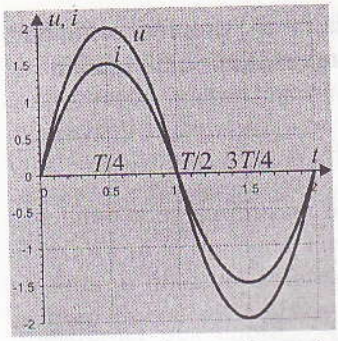


Fig. 3.8. La rezistor tensiunea şi intensitatea sunt în fază

din cele mai diverse plaje: 10 Hz – 30 kHz în instalaţii de sonorizare, 30 kHz – 300 GHz în telecomunicaţii speciale sau comerciale (radio, televiziune, telefonie etc). Curenţi alternativi cu cele mai variate frecvenţe îşi găsesc aplicaţii în industrie, transporturi, investigaţii şi tratamente medicale, agricultură şi, nu în ultimul rând, în tehnica de calcul.

Comportamentul circuitelor parcurse de curenţi alternativi este cel mai adesea studiat cu ajutorul osciloscopului, întrucât acesta permite observarea vizuală a multor caracteristici: amplitudine, fază, formă. De asemenea, se pot compara între ele două sau mai multe semnale ce provin din reţea, comparaţia oferind şi ea o serie de informaţii utile despre reţea.

În continuare vom analiza cu ajutorul osciloscopului, relaţiile temporale (defazajul) dintre tensiunea aplicată unui element de circuit şi intensitatea curentului electric corespunzător. Se utilizează o schemă ca cea din figura 3.4, în care se înlocuieşte generatorul de semnale dreptunghiulare cu unul de tensiune sinusoidală (alimentator de c.a.).

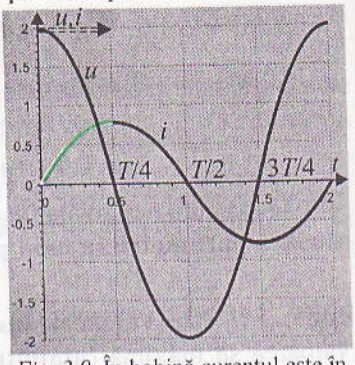


Fig. 3.9. În bobină curentul este în urma tensiunii: dacă deplasăm graficul **u** spre dreapta cu T/4 (îl întârziem), **u** şi **i** vor fi în fază.

Rezistorul. După cum se vede din figura 3.8, intensitatea şi tensiunea au comportări temporale identice (trec simultan prin 0, prin valori maxime etc.): **intensitatea şi tensiunea sunt în fază**. În calitate de rezistor poate fi utilizată bobina cu 1000 de spire, fără miez magnetic.

Bobina. Dacă introducem treptat miezul de fier în bobină vom observa că aspectul imaginii de pe ecranul osciloscopului se modifică: curba intensităţii se deplasează şi îşi micşorează amplitudinea. Dacă sincronizarea osciloscopului este asigurată faţă de tensiune, intensitatea „fuge" spre dreapta (întârzie), în caz contrar – spre stânga (avansează). Introducerea completă a miezului duce decalajul la maxim: intensitatea rămâne în urma tensiunii cu $T/4$ ($\pi/2$). Conform figurii 3.9, dacă am deplasa spre dreapta (am întârzia) curba *tensiunii* cu $T/4$, am obţine oscilaţii în fază pentru tensiune şi intensitate.

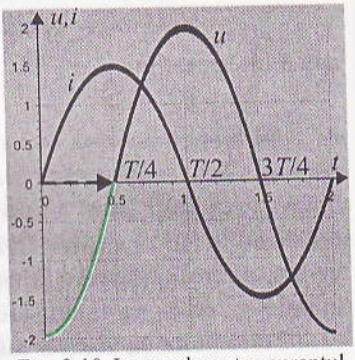


Fig. 3.10. La condensator curentul este în faţa tensiunii: dacă deplasăm graficul *i* spre dreapta cu T/4 (îl întârziem), *u* şi **i** vor fi în fază.

Condensatorul. Pentru condensator se observă un tablou care seamănă cu cel de la bobină (figura 3.10.). O diferenţă, ce trebuie subliniată, este aceea că defazajul are sens invers în comparaţie cu cel care apare în cazul bobinei: tensiunea este în urma intensităţii.

3.1.7. Explicarea calitativă a comportării bobinei şi a condensatorului în c.a.

Datorită autoinducţiei, orice variaţie a intensităţii curentului prin bobină este însoţită de apariţia unui curent de „opoziţie". Acest curent – de autoinducţie – se opune variaţiei intensităţii curentului „principal" prin bobină. Astfel, intensitatea rezultantă a curentului prin bobină „rămâne în urmă" în raport cu tensiunea care a generat schimbările din circuit.

Condensatorul, ca să prezinte o tensiune între armături, are nevoie de o sarcină electrică pe armături. Acumularea de sarcină (deci tensiunea) este produsă de un curent electric care a circulat anterior. În concluzie, tensiunea este în întârziere faţă de curentul care încarcă condensatorul.

Acestea au fost explicaţiile calitative ale fenomenelor, necesare unei mai bune înţelegeri a circuitelor de curent alternativ. Analiza cantitativă apelează la un aparat matematic foarte nou pentru elevi: derivatele.

3.1.8. Explicarea cantitativă a comportării bobinei şi condensatorului în c.a.

În continuare vom obţine ecuaţiile ce descriu comportarea elementelor de circuit în c.a. sinusoidal.

Rezistorul

Conform legii lui Ohm $u=Ri$, în care

$$i = I_{Rmax}\sin(\omega t), \tag{3.9'}$$

$$u_R = RI_{Rmax}\sin(\omega t), \tag{3.12}$$

sau:

$$u_R = U_{Rmax}\sin(\omega t). \tag{3.13}$$

În concluzie, comparând u_R şi i_R constatăm că între tensiune şi intensitate nu există nici o deosebire de comportare temporală. Spunem că, pentru rezistor, **intensitatea şi tensiunea sunt în fază,** iar legea lui Ohm se aplică atât pentru valorile instantanee cât şi pentru cele maxime ($U_{Rmax}=RI_{Rmax}$). Comportarea intensităţii c.a. prin rezistor, în comparaţie cu tensiunea aplicată acestuia este redată de figura 3.9. De asemenea, putem utiliza **reprezentarea fazorială**, despre care s-a vorbit în cap. 1. Pentru rezistor (I) şi (U) sunt doi vectori coliniari (v. fig. 3.11.), care se rotesc în jurul originii cu viteză unghiulară constantă ω, în sens trigonometric.

Fig. 3.11. Fazorii pentru tensiune şi intensitate în cazul unui rezistor

Bobina

Tensiunea u_b, ce apare la bornele bobinei, conform relaţiei (3.6), este direct proporţională cu viteza de variaţie a intensităţii curentului:

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{i(t) - i(t_0)}{t - t_0}.$$

La limită, când $t \to t_0$, **această viteză reprezintă derivata** $i'(t)$ **a funcției** $i(t)$ **în raport cu timpul.**

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{i(t) - i(t_0)}{t - t_0} = i'(t)$$

Cum se demonstrează în analiza matematică, derivata în rapot cu timpul a unei funcții sinusoidale de forma $A\sin(\omega t)$ este: $(A\sin(\omega t))' = A\omega \cos(\omega t)$. Aici ω și A sunt parametri constanți, iar t variabila independentă.

Înlocuim viteza de variație a intensității cu derivata sa în raport cu timpul și ecuația (3.6) se va scrie acum:

$$u_L = -e_a = Li_L'(t). \tag{3.14}$$

În continuare luăm

$$i_L(t) = I_{Lmax} \sin(\omega t), \tag{3.15}$$

pe care îl înlocuim în ecuația (3.14):

$$u_L = L[I_{Lmax}\sin(\omega t)]' = LI_{Lmax}\omega\cos(\omega t) \tag{3.16}$$

Ținând cont de transformarea trigonometrică

$$\cos(x) = \sin(x + \pi/2), \tag{3.17}$$

obținem:

$$u_L = \omega L I_{Lmax}\sin(\omega t + \pi/2), \tag{3.18}$$

sau

$$u_L = U_{Lmax}\sin(\omega t + \pi/2). \tag{3.19}$$

Comparând între ele ecuațiile (3.15), (3.18) și (3.19) ajungem la următoarele **concluzii:**

1. U_{Lmax} și I_{Lmax} sunt direct proporționale

$$U_{Lmax} = \omega L I_{max} \tag{2.20}$$

2. Între intensitatea instantanee (3.15) și tensiunea instantanee (3.19) există un defazaj de $\pi/2$, tensiunea fiind în avans față de curent:

– tensiunea are faza $\varphi_u = +\pi/2$, față de i, iar intensitatea $\varphi_i = -\pi/2$, față de u. În figura 3.12 sunt reprezentați fazorii tensiunii și intensității în cazul unei bobine.

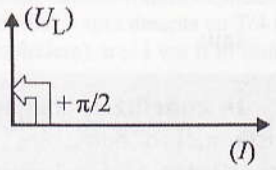


Fig. 3.12. Fazorii tensiunii și intensității pentru bobină (intensitatea este referință)

Relația (3.20) conține coeficientul ωL, care, ca dimensiune și unitate de măsură, pare a fi o rezistență.

Mărimea

$$X_L = \frac{U_{L\max}}{I_{L\max}} = \omega L \tag{3.21}$$

se numește **reactanță inductivă** (a bobinei) și se măsoară în Ω.

Observație. X_L **este coeficient de proporționalitate doar între** U_{Lmax} **și** I_{Lmax} **(între amplitudinile tensiunii și intensității), nu și între valorile instantanee ale acestora! Nu putem spune că pentru bobină ar fi valabilă legea lui Ohm** în adevăratul sens al cuvântului.

Condensatorul. Raționamentul matematic este absolut asemănător cu cel de la bobină. Pornim de la

$$u_c(t) = U_{Cmax}\sin(\omega t). \tag{3.22}$$

Exprimăm intensitatea curentului alternativ derivând tensiunea, conform relației (3.7), în care apar: viteza de variație a sarcinii electice q_c și, respectiv, a tensiunii u_c. Aceste viteze vor fi și ele înlocuite cu derivatele corespunzătoare: $q'(t)$ și $u_c'(t)$. Vom obține:

$$i_c = C(u_c)' = C[U_{Cmax}\sin(\omega t)]' = CU_{Cmax}\omega\cos(\omega t), \quad (3.23)$$

sau, transformând trigonometric,

$$i_C = \omega C U_{Cmax}\sin(\omega t + \pi/2). \quad (3.24)$$

Altfel spus,

$$i_C = I_{Cmax}\sin(\omega t + \pi/2). \quad (3.25)$$

Concluziile pe care le tragem comparând (3.22), (3.24) și (3.25) sunt asemănătoare cu cele din cazul bobinei:

1. U_{Cmax} și I_{Lmax} sunt direct proporționale

$$I_{Cmax} = U_{Cmax}\ \omega C \quad (3.26)$$

2. Între intensitatea instantanee și tensiunea instantanee există un defazaj de $\pi/2$, de această dată tensiunea fiind în urma intensității:

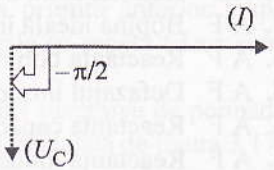


Fig. 3.13. Fazorii tensiunii și intensității pentru condensator (I – fazor de referință)

– tensiunea este defazată cu $\varphi_u = -\pi/2$ în raport de i, iar intensitatea cu $\varphi_i = +\pi/2$ față de u. (Fig. 3.13 ilustrează defazajul dintre fazorii tensiunii și intensității la condensator.)

Și aici apare un coeficient de proporționalitate între U_{Cmax} și I_{Cmax} asemănător cu X_L, dar cu un aspect „invers":

$$X_C = \frac{U_{C\max}}{I_{C\max}} = \frac{1}{\omega C} \quad (3.27)$$

X_C reprezintă **reactanța capacitivă** a condensatorului, măsurată și ea în Ω.

Atât X_L cât și X_C reprezintă doar niște rezistențe aparente. Ele semnifică faptul că o porțiune de circuit, ce conține o bobină sau un condensator, limitează amplitudinea curentului alternativ ca și cum, pe respectiva porțiune de circuit, s-ar afla un rezistor.

Aceste două „constante de proporționalitate", X_L și X_C, sunt constante doar în cazul în care frecvența curentului alternativ nu se modifică. Graficul din figura 3.14 ilustrează dependența celor două reactanțe de frecvență (frecvența pentru care $X_L = X_C$ reprezintă frecvența de rezonanță v. 3.1.13).

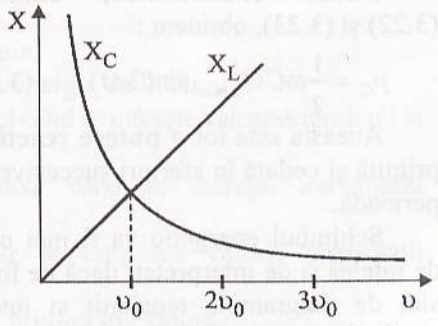


Fig. 3.14. Dependența reactanțelor de frecvență (υ_0 – frecvența de rezonanță)

Comportarea reactivă a unei porțiuni de circuit nu are nimic de a face cu o rezistență electrică. Această comportare se explică prin „conservatorismul" bobinei și a condensatorului, care se opun oricărei schimbări din circuit. Reactanța caracterizează doar posibilitatea pe care o are un element reactiv

de circuit (bobină sau condensator) de a acumula şi a ceda o anumită energie în decursul unui interval de timp dat (o perioadă).

Test

Răspundeţi cu adevărat (A)sau fals (F) la următoarele întrebări:

1. A F Rezistenţa electrică a unui conductor este aceeaşi în curent continuu şi în curent alternativ.
2. A F Rezistorul nu defazează intensitatea în raport cu tensiunea.
3. A F Bobina ideală întârzie intensitatea cu $\pi/2$, faţă de tensiune.
4. A F Reactanţa bobinei scade atunci când creşte frecvenţa.
5. A F Defazajul introdus de condensator creşte odată cu frecvenţa.
6. A F Reactanţa capacitivă nu depinde de frecvenţa curentului.
7. A F Reactanţa inductivă se calculează după formula $X_L = \omega L$.
8. A F Reactanţa unui condensator se calculează după formula: $X_C = \omega C$.
9. A F Reactanţa inductivă este o consecinţă a rezistenţei sârmei din care este realizată bobina.

3.1.9. Relaţiile energetice ale elementelor de circuit cu reţeaua de c.a.

Pornind de la expresia puterii $P = UI$, valabilă pentru curentul staţionar, vom utiliza în continuare puterea instantanee $p = ui$.

Pentru **rezistor**, folosind (3.9') şi (3.12), vom obţine:

$$p_R = ui = U_{R\max}\sin(\omega t) I_{R\max}\sin(\omega t) = RI^2_{R\max}\sin^2(\omega t) \qquad (3.28)$$

Constatăm că puterea instantanee este mereu pozitivă, ceea ce înseamnă că rezistorul preia permanent energie de la circuitul în care este intercalat.

Puterea p_R este o **putere activă**.

În cazul **bobinei**, folosind (3.15) şi (3.16), obţinem:

$$p_L = \omega L I^2_{L\max}\sin(\omega t)\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\omega L I^2_{L\max}\sin(2\omega t), \qquad (3.29)$$

adică o **putere cu semn alternant** (primită şi, apoi, cedată). Puterea p_L este o **putere reactivă**. Valoarea ei medie într-o perioadă este 0.

Pentru **condensator,** utilizând (3.22) şi (3.23), obţinem :

$$p_C = \frac{1}{2}\omega C U^2_{L\max}\sin(2\omega t). \qquad (3.30)$$

Aceasta este tot o **putere reactivă**, primită şi cedată în sferturi succesive de perioadă.

Schimbul energetic va fi mai uşor de înţeles şi de interpretat, dacă ne folosim de diagramele tensiunii şi intensităţii din figurile 3.15, 3.16 şi 3.17:

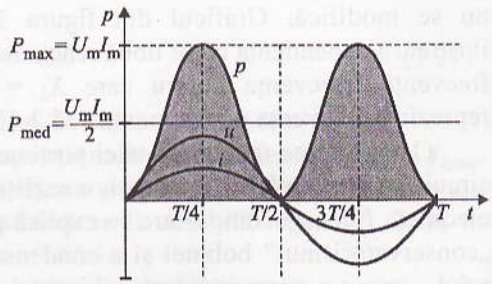


Fig. 3.15. Puterea instantanee pe rezistor în decursul unei perioade

Pentru **rezistor**, conform figurii 3.15, u şi i au în permanenţă acelaşi semn, şi deci **puterea** instantanee $p = ui$ este **mereu pozitivă**. Rezistorul primeşte tot timpul energie de la circuit şi o transformă în **căldură**. Graficul din figura 3.15, reprezintă simultan dependenţa de timp a tensiunii, intensităţii şi a puterii pentru rezistor.

Figura 3.16 ilustrează schimbul energetic pentru **bobină**. În **primul sfert de perioadă** tensiunea şi intensitatea sunt pozitive, în consecinţă $p > 0$, adică bobina **primeşte energie** de la circuit. În **următorul sfert** de perioadă, intensitatea continuă să fie pozitivă, dar tensiunea devine negativă (fiindcă intensitatea scade), deci $p < 0$ şi, în consecinţă, bobina **cedează energia** primită anterior înapoi în circuit. În următoarele două sferturi de perioadă lucrurile se repetă (doar semnele pentru u şi i se inversează).

Condensatorul primeşte şi cedează energie în sferturi succesive de perioadă, tot din cauza defazajului $\pi/2$ între curent şi tensiune, ilustraţia fiind dată de figura 3.17.

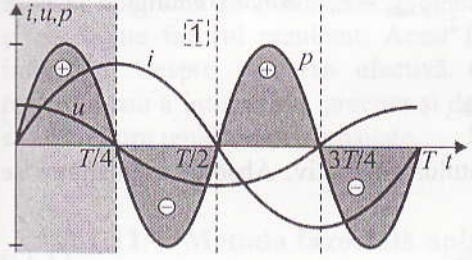


Fig. 3.16. Puterea instantanee pentru bobină. Comparaţi 1 cu 1' din 3.17

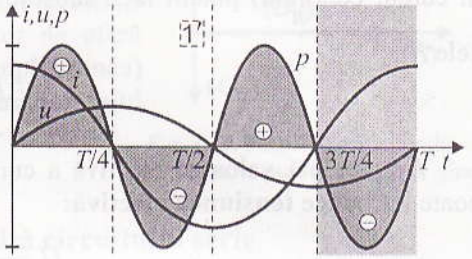


Fig. 3.17. Puterea instantanee pentru condensator

Remarcaţi că, în ultimele două grafice, rolurile tensiunii şi intensităţii s-au inversat: în primul tensiunea este în avans faţă de intensitate, în timp ce în al doilea intensitatea este defazată în avans faţă de tensiune. De asemenea, se poate observa că schimbul de energie este realizat de bobină şi condensator în contratimp. Comparaţi zonele cu fundal alb din figura 3.16 şi 3.17, în care intensitatea are aceeaşi comportare (aceleaşi faze): în timp ce bobina cedează energie (**1** din fig. 3.16), condensatorul primeşte (**1'** din fig. 3.17).

Test

1. A F În c.a. rezistorul nu consumă energie.
2. A F Bobina acumulează în permanenţă energie de la circuit.
3. A F Condensatorul primeşte energie atunci când se măreşte valoarea tensiunii la borne.
4. A F Condensatorul primeşte energie doar când se măreşte intensitatea curentului.
5. A F Bobina acumulează energie doar la creşterea valorii intensităţii curentului.
6. A F Condensatorul transformă energia primită în căldură.
7. A F Bilanţul energetic al condensatorului este 0 pe timpul unei perioade.

3.1.10. Valori efective (eficace)

Transformăm relația (3.28) sub forma $p_R = \frac{1}{2} RI_{R\max}^2 [1 + \cos(2\omega t)]$.

Se constată că valoarea $\frac{1}{2} RI_{R max}^2 = P$ reprezintă în fapt valoarea medie a puterii în decursul unei perioade (valoarea medie pentru $\cos(2\omega t)$ este 0). Din graficul puterii instantanee pentru rezistor (fig. 3.15), se vede că puterea medie este $\frac{1}{2} RI_{R max}^2$.

Dacă dorim să exprimăm energia activă consumată de rezistor în decursul unei perioade ($t = T$), după o relație de genul $W = PT = UIT = I^2RT = U^2T/R$, (la fel ca în curent continuu) putem face substituția $\frac{1}{2} I_{R max}^2 = I_R^2$, adică (renunțând la indicele R).

$$I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}. \tag{3.31}$$

I reprezintă valoarea efectivă a curentului alternativ. Absolut asemănător se poate introduce **tensiunea efectivă:**

$$U = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}. \tag{3.32}$$

Valoarea efectivă a intensității unui c.a. este egală cu acea valoare a intensității unui curent continuu staționar, care degajă, într-o perioadă, aceeași căldură, în același rezistor ca și curentul alternativ dat.

Valoarea efectivă a fost introdusă pentru ușurarea trecerii de la alimentarea publică în curent c.c. la cea în c.a.**Tensiunile și intensitățile indicate** de aparatele de c.a., **sau inscripționate** pe consumatori, **sunt valori efective!**

Observație. *Relațiile **(3.31) și (3.32)** sunt valabile doar **pentru curenții alternativi sinusoidali**. Pentru curenți alternativi nesinusoidali se calculează concret puterea medie și, apoi se află valoarea efectivă.*

În cele ce urmează vom nota valorile efective cu majuscule simple (U,I), iar amplitudinile cu majuscule însoțite de indicele m (U_m, I_m).

3.1.11. Rezolvarea circuitelor de c.a.

Până în prezent am constatat că legea lui Ohm se poate aplica în cazul curentului alternativ doar pentru porțiuni de circuit rezistive (este valabilă atât pentru valorile instantanee cât și pentru amplitudini sau valori efective).

Legile lui Kirchhoff *sunt valabile doar pentru valorile **instantanee** ale tensiunilor și intensităților (nu se aplică amplitudinilor sau valorilor efective).*

O metodă de rezolvare a rețelelor de c.a. este cea **analitică**, bazată pe utilizarea ecuațiilor care exprimă tensiunile și intensitățile instantanee. Ea pornește de la teoremele lui Kirchhoff. Spre exemplu pentru figura 3.18. $u = u_R + u_L + u_C$. În continuare se înlocuiesc expresiile matematice pentru tensiuni și se rezolvă ecua-

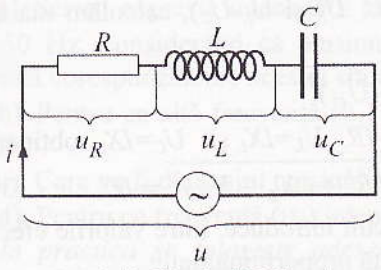


Fig. 3.18. Circuitul RLC serie

țiile care decurg. Această metodă este foarte greoaie și nu permite o interpretare intuitivă a comportării circuitului sau o predicție rapidă a acesteia.

O a doua metodă, mai rapidă, care permite și o interpretare comodă a rezultatelor, este metoda **fazorială**. Această metodă a fost prezentată în primul capitol, la compunerea oscilațiilor mecanice paralele.

Intensitățile și tensiunile instantanee sinusoidale pot fi înlocuite cu fazorii corespunzători. Fazorii de același fel (tensiuni, intensități) reprezentați pe aceeași diagramă se însumează geometric (vectorial) și se obține fazorul rezultant. Acest fazor ne oferă informații despre valoarea efectivă (amplitudinea) tensiunii sau a intensității, precum și despre defazajul existent între tensiune și intensitate.

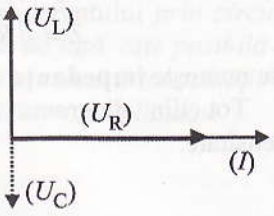


Fig. 3.19. Fazorii tensiunilor din circuitul serie puși în aceeași origine

3.1.11.1. Metoda fazorială aplicată circuitului serie

Considerăm un circuit alcătuit prin legarea în serie a unui rezistor cu o bobină și un condensator, ca în figura 3.18. Cunoscând R, L, C și frecvența curentului alternativ, trebuie găsită relația dintre valorile efective ale tensiunii și intensității, precum și defazajul dintre ele.

Având în vedere faptul că **intensitatea** este aceeași în tot circuitul, o vom lua drept **fazor de referință**.

În figura 3.19, fazorii sunt reprezentați în aceeași origine, însumarea lor putându-se realiza după metoda paralelogramului (fig. 3.20). Dacă îi așezăm succesiv, ca figura 3.21, vom găsi rapid rezultanta, prin metoda poligonului vectorial: unim originea primului fazor cu vârful ultimului. Aplicând teorema lui

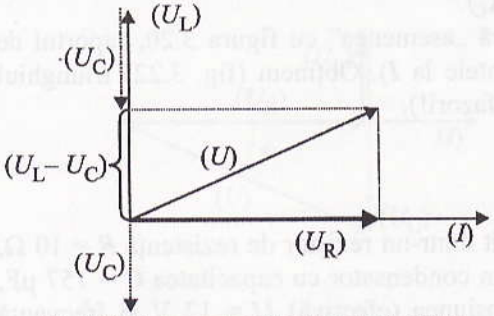


*Fig. 3.20.*Compunerea fazorilor după regula paralelogramului pentru circuitul serie

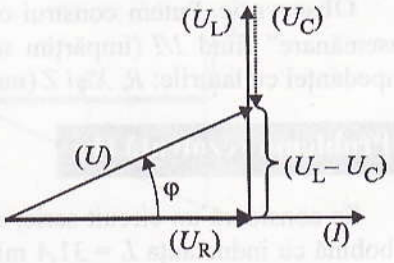


Fig. 3.21. Fazorii tensiunilor în circuitul serie, compuși după regula poligonului

Pitagora în triunghiul tensiunilor (cu laturile U, U_R şi U_L-U_C), calculăm mărimea fazorului (U) rezultant:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} .$$

Înlocuind în această relaţie tensiunile U_R=IR, U_L=IX_L şi U_C=IX_C obţinem:

$$U = \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2} = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = IZ . \qquad (3.33)$$

O primă constatare este aceea că acest circuit introduce, între valorile efective (amplitudini) ale intensităţii şi tensiunii, o directă proporţionalitate:

$$U = IZ \quad \text{sau} \quad I = U/Z,$$

în care constanta de proporţionalitate este

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} . \qquad (3.34)$$

Z se numeşte **impedanţa** circuitului şi se se măsoară în ohm (Ω).

Tot din diagrama fazorială 3.21, obţinem defazajul dintre tensiune şi intensitate:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} . \qquad (3.35)$$

Acum putem scrie ecuaţiile intensităţii şi tensiunii instantanee, corespunzătoare circuitului serie. Considerând faza iniţială a intensităţii $\varphi_i = 0$, avem:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t)$$

cu I=U/Z, I_m=U_m/Z

şi

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$$

cu U=IZ, U_m=I_mZ şi $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{X_L - X_C}{R}$.

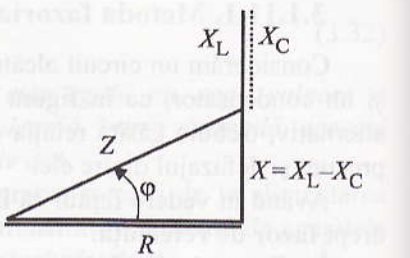


Fig. 3.22. Triunghiul impedanţei unui circuit serie cu caracter inductiv

Conform (3.34), impedanţa va avea aceeaşi valoare şi dacă, în loc de $(X_L - X_C)$, scriem $(X_C - X_L)$. Defazajul este sensibil la o asemenea schimbare, inversându-şi semnul (deci sensul). Prin **convenţie** se stabileşte că această diferenţă este $(X_L - X_C)$.

Observaţie. Putem construi o figură „asemenea" cu figura 3.20, raportul de „asemănare" fiind $1/I$ (împărţim segmentele la I). Obţinem (fig. 3.22) triunghiul impedanţei cu laturile: R, X şi Z (nu sunt fazori!).

Problemă rezolvată (1)

Se consideră un circuit serie, alcătuit dintr-un rezistor de rezistenţă R = 10 Ω, o bobină cu inductanţa L = 31,4 mH şi un condensator cu capacitatea C = 157 μF, alimentat de un generator de c.a. cu tensiunea (efectivă) U = 12 V şi frecvenţă variabilă.

a) Scrieți expresia intensității curentului ($i(t)$) prin circuit, pentru o frecvență υ = 50 Hz, considerând că tensiunea are faza inițială 0, și desenați diagrama fazorială corespunzătoare acestei situații.

b) Pentru ce altă frecvență (υ_1) se obține o amplitudine a intensității ca și la pct. a) ?

c) Care va fi defazajul tensiunii (φ_1) față de intensitate la această frecvență?

d) Pentru ce frecvență (υ_0) intensitatea curentului prin circuit va fi maximă?

În practică se folosește adesea termenul curent *în sensul de* intensitatea curentului. *De asemenea, în c.a., se vorbește despre* curent, intensitate *și* tensiune *având-se în vedere* valorile efective. *În consecință la d) cerința trebuie înțeleasă astfel: „Pentru ce frecvență* valoarea efectivă a intensității curentului *prin circuit va fi maximă? Facem această observație pentru că, în cazul de față, este posibilă o confuzie între „intensitatea maximă"(= „valoarea efectivă maximă a intensității") – care se cere – și „valoarea instantanee maximă a intensității" (= „amplitudine").*

e) Ce impedanță (Z_0) are circuitul în acest caz?

Rezolvare

a) Cerința se rezumă la găsirea amplitudinii intensității $I_m = I\sqrt{2}$ și a defazajului dintre curent și tensiune. (Vom considera $\pi^2 \approx 10$)

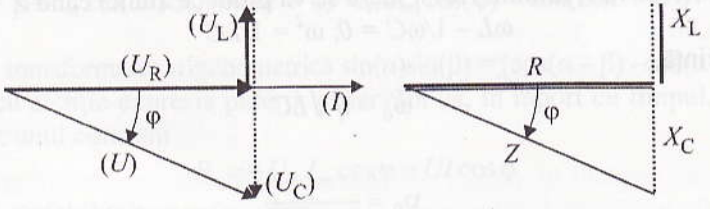
Intensitatea :

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}.$$

Pentru simplificarea calculelor, este bine să remarcăm faptul că L = 31,4 mH = = 10π mH, iar C = 157μF = 100π/2μF. Obținem: $X_L \approx 10\Omega$, $X_C \approx 20\Omega$ și $Z \approx 10\sqrt{2}\Omega$.

Rezultă $I = \frac{12}{10\sqrt{2}} = \frac{1{,}2}{\sqrt{2}}$ A, adică $I_m = I\sqrt{2} = 1{,}2$A .

Diagrama fazorială, având **(I) ca fazor de referință**, va arăta ca cea din figura 3.23, a, diferită ca aspect de cea din figura 3.22. Acest lucru a apărut din cauză că $X_C > X_L$. Un circuit de acest gen „are caracter **capacitiv**", iar diagrama reactanțelor este ca cea din figura 3.23, b. (Circuitele pentru care $X_L > X_C$ au caracter **inductiv**.)



a b

Fig. 3.23.

a) Diagrama fazorială a unui circuit serie având caracter capacitiv ($U_C > U_L$)

b) Diagrama impedanței unui circuit serie având caracter capacitiv ($X_C > X_L$)

În continuare, calculăm defazajul tensiunii în raport cu intensitatea:

$$(3.35) \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R},$$

$\operatorname{tg}(\varphi) = -1$ şi, în consecinţă, $\varphi = -\pi/4$.

Acest defazaj, conform (3.9), reprezintă diferenţa $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$.

Obţinem: $\varphi = -\varphi_i$, întrucât $\varphi_u = 0$. În consecinţă: $\varphi_i = -\varphi = \pi/4$ şi

$$i(t) = 1{,}2\sin(100\pi\, t + \pi/4).$$

În ceea ce priveşte diagrama fazorială având **(U) fazor de referinţă**, aceasta este cea din figura 3.24, adică figura 3.23, a, rotită cu unghiul φ ($\pi/4$ în sens trigonometric).

b) Rezolvăm ecuaţia (3.33), în care punem $I = 1{,}2/\sqrt{2}\ A$. Ecuaţia în ω, astfel obţinută, va fi una bipătrată, cu patru rădăcini reale. Două vor fi pozitive, una având valoarea $100\pi\ s^{-1}$, iar celelalte negative, una fiind $-100\pi\ s^{-1}$. (Esenţa fizică a acesteia ar fi aceea că rotorul alternatorului, care produce curentul alternativ, se roteşte în sens invers celui trigonometric.) Celelalte două rădăcini, şi ele opuse, vor reprezenta răspunsul căutat:
$\omega = \pm 200\pi\ s^{-1}$. Frecvenţa cerută este
$\upsilon_1 = 100$ Hz

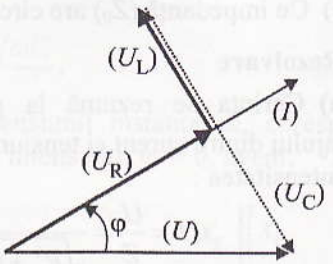


Fig. 3.24. Diagrama fazorială a unui circuit serie având caracter capacitiv, în care (U) este fazor de referinţă

Observaţie. O altă cale se bazează pe observaţia că I poate avea aceeaşi valoare pentru acele pulsaţii pentru care $Z = 10\sqrt{2}\,\Omega$.

De asemenea, dacă inversăm semnul reactanţei $X = X_L - X_C$, şi rezolvăm ecuaţia $X = 10$, obţinem pulsaţiile pentru care $I = 1{,}2/\sqrt{2}\ A$.

c) Răspunsul este evident, după ce observăm că şi în (3.35) se poate înlocui $X = -10\ \Omega$ cu $X' = 10\ \Omega$. Rezultă: $\operatorname{tg}\varphi_I = 1$ deci $\varphi_I = \pi/4$ – defazajul este opus celui de la punctul a).

d) Intensitatea va fi maximă pentru acea frecvenţă, pentru care, în expresia $I = U/Z$ numitorul va fi minim. Acest lucru se va produce atunci când $X = 0$:

$$\omega L - 1/\omega C = 0,\ \omega^2 = 1/LC$$

şi, în consecinţă,

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \tag{3.36}$$

sau

$$\upsilon_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{3.37}$$

Se obţine $\omega_0 = 100\sqrt{2}\pi s^{-1}$, sau $\upsilon_0 = 50\sqrt{2}$ Hz $= 70{,}7$ Hz.

Această situaţie, în care ***intensitatea*** este ***maximă în circuitul serie***, reprezintă starea de ***rezonanţă*** a circuitului (v. paragraful **3.1.13**).

Observație. Frecvența de rezonanță reprezintă punctul de trecere de la caracterul capacitiv $X < 0$ (frecvențe mici) la cel inductiv $X > 0$ (frecvențe mari).

e) Întrucât intensitatea este maximă, $X = 0$ și impedanța, conform (3.34), devine egală cu $R \Rightarrow Z_0 = R = 10\ \Omega$.

3.1.12. Puterea în c.a.

Dacă luăm în considerare faptul că într-un circuit (să zicem serie), intensitatea și tensiunea au un defazaj relativ (una față de alta), problema puterii (a energiei) electrice devine foarte interesantă.

Așa cum am subliniat mai sus, rezistorul reprezintă un consumator activ de energie electrică.

Pentru bobină, ca și pentru condensator, din cauza defazajului $\pm \pi/2$, în decursul unei perioade bilanțul energetic este 0. Bazându-ne pe graficele din figura 3.25, constatăm că de fapt condensatorul și bobina lucrează în contratimp: tensiunile u_C și u_L sunt în opoziție. În timpul în care bobina trebuie să primească energie, condensatorul cedează enegie și invers. Evident, nu se pune, în general, problema compensării reciproce a energiilor reactive inductivă și capacitivă. Diferența dintre aceste energii (puteri) este furnizată și, apoi, luată înapoi de către circuit (generator) în sferturi succesive de perioadă.

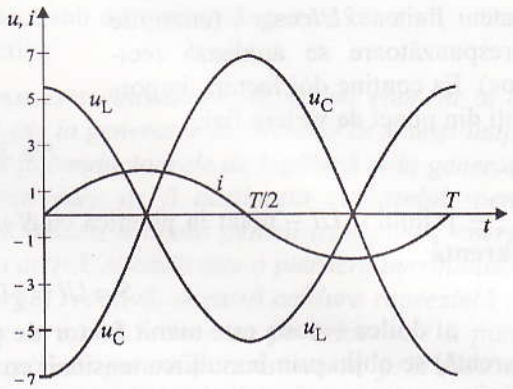


Fig. 3.25. Graficele tensiunilor u_L și u_C în cazul unui circuit serie (se observă că, între ele, acestea sunt în opoziție de fază și defazate cu $\pm \pi/2$ față de i)

Vom calcula puterea instantanee $p = ui$, folosind expresiile $i(t)$ și $u(t)$, considerând circuitul ca fiind serie:

$$p = I_m \sin(\omega t) U_m \sin(\omega t + \varphi) = I_m U_m [\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)] / 2$$

(Am utilizat transformarea trigonometrică $\sin(\alpha)\sin(\beta) = [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + + \beta)] / 2$)
Analizând cu atenție expresia puterii, observăm că, în raport cu timpul, ea conține doi termeni: unul constant

$$P_{=} = \tfrac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi = UI \cos\varphi$$

și altul variabil (alternant):

$$P_{\sim} = \tfrac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + \varphi) = = UI \cos(2\omega t + \varphi)$$

Termenul constant reprezintă **puterea activă**, absorbită de circuit și transformată în căldură sau lucru mecanic:

$$P = \tfrac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi = UI\cos\varphi = U_R I \qquad (3.38)$$

Puterea activă este de fapt valoarea medie a puterii instantanee în decurs de o perioadă. Dacă privim graficul puterii din figura 3.26., constatăm că $UI\cos\varphi$ reprezintă valoarea medie a părții care rămâne prin decuparea „vârfurilor" negative și ale celor care sunt peste linia $2UI\cos\varphi$ (energiile corespunzătoare se anulează reciproc). Ea conține doi factori, importanți din punct de vedere fizic:

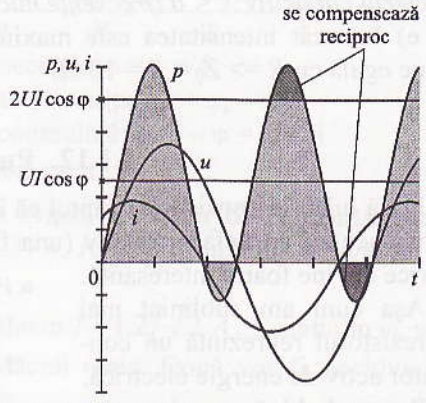


Fig. 3.26. Puterea instantanee în funcție de timp (*i* defazat cu π/4 în fața lui *u*)

– primul – UI – notat în practică cu S și cunoscut sub denumirea de **putere aparentă**;

$$S = UI = \tfrac{1}{2} U_m I_m \qquad (2.39)$$

– al doilea – $\cos\varphi$ este numit **factor de putere**. Deși ambele puteri (activă și aparentă) se obțin prin înmulțirea tensiunii cu intensitatea, unitățile de măsură sunt diferite, pentru a se face distincția între esențele lor fizice.

Puterea **activă** P se măsoară în W.

Unitatea de măsură pentru puterea **aparentă** S este VA (volt·amper) .

S reprezintă o putere ce pare a fi consumată, obținută prin înmulțirea tensiunii efective U cu intensitatea efectivă I, măsurate în circuit, fără a ține cont de defazaj (oricum, defazajul nu poate fi sesizat de voltmetre și ampermetre).

Factorul de putere $\cos\varphi$ ne **arată, ce fracțiune din puterea aparentă** S (puterea ce pare a fi consumată de circuit) **este consumată** în mod **real**.

$\cos(\varphi)$, evident, nu are unități de măsură. Are, în schimb, caracter: inductiv ($X > 0, X_L > X_C$) sau capacitiv ($X < 0, X_C > X_L$), după caracterul circuitului.

Expresia factorului de putere pentru un circuit serie, se obține din diagrama impedanței, fig.3.21:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \qquad (3.40)$$

Termenul variabil al puterii instantanee reprezintă puterea reactivă ce este vehiculată între circuit și generator. Această componentă alternativă a puterii instantanee are o pulsație 2ω (o frecvență dublă) în comparație cu cea a curentului. În consecință valoarea sa medie este 0 chiar pe parcursul unei semiperioade (T/2) a curentului. (Bilanțul energetic pe o perioadă este evident 0.)

Puterea instantanee poate fi scrisă şi altfel, dacă apelăm la o altă transformare trigonometrică:

$$p=U_m I_m \sin^2(\omega t)\cos\varphi + U_m I_m \sin(\omega t)\cos(\omega t)\sin\varphi$$

(Am folosit : $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$.)

Primul termen reprezintă puterea activă instantanee (mereu pozitivă), al doilea – puterea reactivă instantanee (alternantă). După cum am mai subliniat, media pe o perioadă a puterii active este dată de (2.38), iar a puterii reactive este 0.

Modulul puterii instantanee reactive are, pe o perioadă, **valoarea medie**

$$Q=\tfrac{1}{2}U_m I_m \sin\varphi = UI\sin\varphi = (U_L - U_C)I = S\sin\varphi \qquad (3.41)$$

Q (notat uneori şi P_r) este cunoscut sub denumirea de putere reactivă, unitatea de măsură fiind **var**(volt · amper reactiv).

Observaţie. *Energia reactivă* ***nu este consumată*** *de niciun element al circuitului.* ***Transportul*** *acestei energii (de la generator la circuitul în sine şi înapoi) se realizează cu degajare de căldură în conductoarele de legătură şi în generator. Această căldură se degajă indiferent care ar fi destinaţia curentului: pentru energie activă sau pentru reactivă. Căldura disipată pentru transportul energiei reprezintă o pierdere. Pentru energia activă, aceasta este o pierdere inevitabilă – o cheltuială de producţie. Pentru energia reactivă, această caldură reprezintă „un lux" absolut inutil. Din acest motiv se caută reducerea pe orice cale a puterii reactive transportate (mărirea factorului de putere la consumator, prin utilizarea unor condensatoare special destinate acestui scop).*

După cum am remarcat mai sus, din diagrama fazorială a circuitului, putem obţine şi diagrame asemenea (când am discutat de apariţia diagramei impedanţei: figura 3.22 s-a obţinut prin împărţirea diagramei tensiunilor la intensitate). O altă diagramă asemenea se obţine prin înmulţirea tensiunilor din figura 3.21 cu I. Această nouă diagramă – figura 3.27, este triunghiul puterilor. Ea are ca laturi S, P, şi $Q = Q_L - Q_C$. Constatăm că:

$$S^2=P^2+Q^2 \qquad (3.42)$$

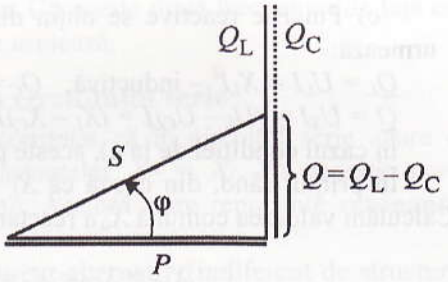


Fig. 3.27. Triunghiul puterilor pentru un circuit (serie) cu caracter inductiv

Problemă rezolvată (2)

Se consideră un circuit serie, în care se cunosc R, L şi C. Circuitul este alimentat cu o tensiune efectivă U, de frecvenţă variabilă. Aflaţi:

a) pentru ce frecvenţă puterea activă este maximă şi expresia acestei puteri;

b) impedanţa circuitului în acest caz, precum şi defazajul dintre curent şi tensiune;

c) puterile reactive: inductivă, capacitivă şi totală, în cazul a);

d) de câte ori este mai mare puterea reactivă inductivă decât cea activă;

e) puterea aparentă în acest caz;

f) frecvența pentru care puterea activă este jumătate din cea maximă ($\frac{1}{2}P_{max}$).

Rezolvare

a) Pornim de la $P = UI\cos\varphi$, în care introducem intensitatea I din (3.33) și factorul de putere, $\cos\varphi$, din (3.40). Obținem:

$$P = U\cdot\frac{U}{Z}\cdot\frac{R}{Z} = \frac{U^2R}{Z^2} = RI^2 = \frac{U^2R}{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}$$

Puterea va fi maximă atunci când intensitatea va fi maximă ($P = RI^2$), adică, așa cum am văzut la problema anterioară, când impedanța va fi minimă. Condiția care se impune: numitorul fracției P să fie minim :

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}=0 \Rightarrow \omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\omega_0 \text{ și } \upsilon=\upsilon_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

adică din nou formulele (3.36) și (3.37).

Puterea maximă va avea expresia:

$$P_{max}=U^2/R = P_0$$

b) Impedanța va fi: $Z_0 = R$, iar defazajul $\varphi_0 = 0$ ($\cos\varphi = 1$, $\operatorname{tg}\varphi = 0$).

c) Puterile reactive se obțin din produsele UI corespunzătoare, după cum urmează:

$Q_L = U_LI = X_LI^2$ – inductivă; $Q_C = U_CI = X_CI^2$ – capacitivă;

$Q = U_XI = (U_L - U_C)I = (X_L - X_C)I^2$ – totală.

În cazul condiției de la a), aceste puteri vor avea aspecte particulare.

În primul rând, din cauză că $X_L = X_C = X_0$, vom avea $\boldsymbol{Q_{L0} = Q_{C0}}$ **și** $\boldsymbol{Q_0 = 0}$. Calculăm valoarea comună X_0 a reactanțelor (se numește reactanța caracteristică):

$$X_{L0} = X_{C0} = X_0 = \omega_0 L = L\frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Folosind $I=\frac{U}{Z}$ și faptul că $Z_0=R$, avem $I = I_0=\frac{U}{R}$. Obținem:

$$Q_0 = Q_{L0} = Q_{C0} = \frac{U^2}{R^2}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{U^2}{R}\cdot\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = P_0\cdot Q_f,$$

în care

$$Q_f = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{X_0}{R}.$$

d) $Q_{L0}/P_0=Q_f$; Q_f -este numit **factor de calitate** (ne vom întâlni cu el în continuare).

e) Puterea aparentă este $S = UI$. În acest caz, când $I = I_0 = \frac{U}{R}$, obținem

$S = \frac{U^2}{R} = P_0$.

f) Egalăm expresia puterii P cu $0{,}5 \cdot P_{max}$:

$$\frac{U^2}{2R} = \frac{RU^2}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}, \text{ adică } R^2 = (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2,$$

sau: $\omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R$ (în locul unei ecuații de gradul 4). Cele două ecuații de gradul 2 pot fi scrise astfel:

$$\omega^2 LC - 1 = \pm \omega RC, \quad \text{sau} \quad \omega^2 \mp \omega \frac{R}{L} - \frac{1}{LC} = 0 .$$

Înlocuind $1/LC$ cu ω_0^2, obținem:

$$\omega^2 \mp \omega \frac{R}{L} - \omega_0^2 = 0$$

Rezolvând ecuațiile, obținem patru rădăcini, din care reținem doar două:

$$\omega_1 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2} \quad \text{și} \quad \omega_2 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2} ,$$

cu frecvențele corespunzătoare $\upsilon_{1,2} = \omega_{1,2} / 2\pi$. Cu aceste două frecvențe (de fapt cu diferența lor) ne vom reîntâlni în capitolul ce urmează.

3.1.13. Rezonanța circuitului serie

În problemele rezolvate anterior, s-a constatat că în circuitul serie apare o situație specială generată de egalitatea reactanțelor $X_C = X_L$. În această stare **intensitatea și puterea activă sunt maxime**. Această stare reprezintă **rezonanța circuitului serie.**

De fapt **rezonanța** într-un circuit de curent alternativ (indiferent de structura acestuia: serie, paralel etc.) **se obține atunci când curentul și tensiunea sunt în fază:**

$$\varphi = 0.$$

În cazul circuitului serie, această condiție coincide cu $X_C = X_L$ (în general $X_C = X_L$ nu implică neapărat rezonanța).

Obținem: $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$, (3.36)

și frecvența de rezonanță (3.37)

$$\upsilon = \upsilon_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} .$$

După cum am constatat în problemele rezolvate anterior la **rezonanța serie** ($X_C = X_L$) intensitatea este maximă și, drept urmare, puterea activă este maximă.

Tot în acest caz tensiunile U_L şi U_C sunt egale. Din acest motiv rezonanţa serie mai este numită şi rezonanţa tensiunilor.

Experiment

Se realizează circuitul din figura 3.28, în care R este un bec de 6V – 0,05A, L – bobina cu 1000 de spire împreună cu miezul magnetic ($U + I$), C un condensator de 100μF/100 V, iar voltmetrele cu scala de 100V~. Circuitului i se aplică o tensiune alternativă de 6-8 V, 50 Hz. Săgeata înclinată de pe „miezul" bobinei din figură semnifică faptul că inductanţa bobinei este variabilă. În cazul de faţă aceasta se modifică prin deplasarea piesei în formă de I. Iniţial miezul este închis complet, becul nu arde, iar voltmetrele indică tensiuni apropiate de 0. Dacă începem să deplasăm I faţă de U, constatăm o creştere a tensiunii U_2 iar mai apoi şi a lui U_1. Treptat tensiunile cresc tot mai mult, ajungând la 50–70 V, iar becul luminează tot mai puternic. Continuând deplasarea miezului constatăm o scădere a luminozităţii becului, însoţită de scăderea tensiunilor U_1 (mai rapid) şi U_2. Dacă, în paralel cu cele două voltmetre, punem un al treilea vom constata că acesta indică mai tot timpul 2–6 V, inclusiv când V_1 şi V_2 arată tensiuni maxime. (Putem folosi doar un singur voltmetru, cu care să măsurăm tensiunile pe rând, repetând experienţa de câteva ori.)

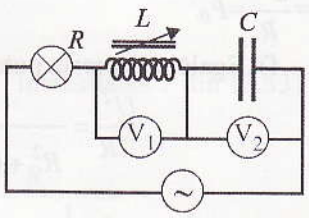


Fig. 3.28. Studiul rezonanţei la circuitul serie

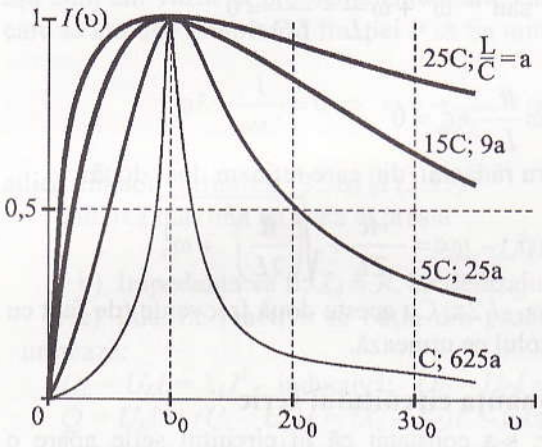


Fig. 3. 29. Curbe de rezonanţă pentru aceeaşi rezistenţă şi aceeaşi frecvenţă de rezonanţă, dar pentru capacităţi şi inductanţe diferite

Situaţia în care becul arde cu intensitate maximă reprezintă starea de rezonanţă a circuitului.

Demonstrarea experimentală a rezonanţei în circuitele de c.a. se mai poate realiza cu un circuit asemănător celui descris, dar folosind în locul alimentatorului (υ = 50Hz) un generator cu frecvenţa variabilă. În aceast experiment se poate analiza mai uşor influenţa inductanţei şi a capacităţii asupra rezonanţei. Reprezentând intensitatea efectivă a curentului în funcţie de frecvenţă obţinem o curbă $I(\upsilon)$ – figura 3.29 –, numită şi curbă de rezonanţă. În această figură este reprezentată de fapt o familie de curbe de rezonanţă. Curbele de rezonanţă $I(\upsilon)$ au un aspect variabil, în funcţie de valorile R, L şi C. Contează nu numai valorile în sine ci şi relaţiile dintre ele. Spre exemplu, pentru o rezistenţă dată şi un produs LC

dat (aceeași frecvență de rezonanță) se obțin curbe total diferite, în funcție de raportul L/C (fig. 3.29). Curbele diferă prin „lărgimile" lor.

În figura 3.30, pe lângă intensitate, mai este reprezentată și puterea ca funcție de frecvență. (Unitățile sunt arbitrare, alese astfel ca maximele să coincidă). La valoarea 0,5 a puterii este marcată lărgimea de bandă, adică acel interval de frecvențe pentru care puterea activă depășește 50% din puterea de rezonanță: $\Delta\upsilon_{0,5} = \upsilon_2 - \upsilon_1$, unde υ_1 și υ_2 s-au obținut în problema rezolvată (2). Din grafic se observă că puterea scade rapid în afara acestui interval. „Îngustimea" curbei de rezonanță este dată de raportul $\upsilon_0/\Delta\upsilon$: cu cât raportul are o valoare mai mare, cu atât curba este mai îngustă. Folosind rezultatele problemei (2), obținem:

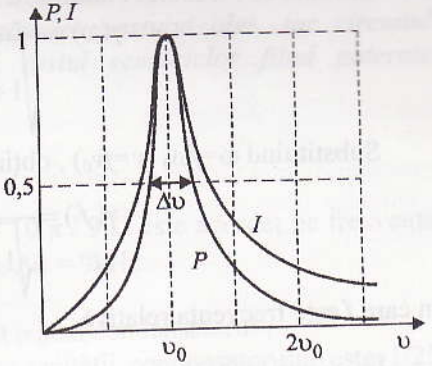


Fig. 3.30. Dependența intensității și a puterii active de frecvență.

$\frac{\upsilon_0}{\upsilon_2 - \upsilon_1} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, adică factorul de calitate Q_f.

Factorul de calitate este deci egal cu inversul lărgimii relative de bandă $\left(Q_f = \frac{\Delta\upsilon_{0,5}}{\upsilon_0}\right)$. De asemenea, am constatat că Q_f mai arată de câte ori puterea reactivă inductivă este mai mare decât cea activă în condiții de rezonanță (problema 2): $Q_f = = \left(\frac{Q_L}{P}\right)_{rez} = \left(\frac{Q_C}{P}\right)_{rez}$ sau raportul dintre reactanța caracteristică și rezistență.

Pentru curbele de rezonanță se poate utiliza așa zisa normare. Normarea constă în reprezentarea curbei $\gamma(\upsilon) = I(\upsilon)/I_0$, unde I_0 este intensitatea la rezonanță.

În esență curba normată (numită și *caracteristică de frecvență*) nu este altceva decât curba de rezonanță pentru $I_0 = 1$ A. Analizând, constatăm că $\gamma(\upsilon) = R/Z$. Înlocuind Z cu (3.34), și folosind (ω rez), vom obține pentru început $\gamma(\omega)$:

$$\gamma(\omega) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{R}{R\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\left(\frac{\omega L \omega_0}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega C \omega_0}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 L}{R^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

adică

$$\gamma(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{L}{R^2C}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

Substituind $\omega=f\omega_0$ ($\nu=f\nu_0$), obținem:

$$\gamma(f)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{L}{R^2C}(f-1/f)^2}},$$

în care f este frecvența relativă.

În expresia lui γ constatăm prezența factorului de calitate $Q_f=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ (Problema rezolvată 2) și, drept urmare, obținem expresia finală:

$$\gamma(f)=\frac{1}{\sqrt{1+Q_f^2(f-1/f)^2}}.$$

Constatăm că toate circuitele care au aceeași valoare pentru Q_f, indiferent de frecvența de rezonanță sau de valorile concrete pentru R, L sau C, prezintă aceeași curbă de rezonanță $\gamma(f)$.

Figura 3.31 ilustrează dependența caracteristicilor de frecvență ale circuitelor serie de factorul de calitate. (Pe aceste curbe lărgimea relativă de bandă se caută la nivelul $1/\sqrt{2}=\sqrt{2}/2$, pentru că puterea este proporțională cu I^2.) Se observă o îngustare pronunțată a caracteristicilor, odată cu creșterea factorului de calitate. Îngustarea acestor curbe semnifică o selectivitate mai ridicată ca a circuitului (circuitul „alege" dintr-o multitudine de curenți alternativi doar curenții cu frecvența apropiată de frecvența de rezonanță). În afara acestui interval puterea preluată de circuit se micșorează foarte puternic, astfel că putem neglija aportul unor curenți cu frecvențele respective.

Circuitele rezonante sunt folosite în telecomunicații pentru selectarea semnalelor radio-TV. Rolul acestora este de a separa, din multitudinea curenților induși în antena receptorului, semnalul corespunzător stației dorite. Acest semnal are frecvențe cuprinse într-un interval din jurul unei frecvențe date, numită frecvență purtătoare. Fiecărui post i se alocă o anumită frecvență purtătoare și un anumit interval de frecvențe. Pentru radiodifuziune

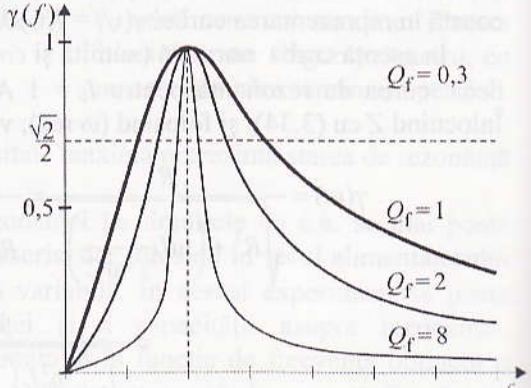


Fig. 3.31. Caracteristici de frecvență pentru diverse valori ale factorului de calitate (nivelul $\frac{\sqrt{2}}{2}$ evidențiază lărgimea de bandă)

banda este de 8 kHz (AM) sau 15 kHz (FM). Circuitului rezonant i se stabileşte ca frecvenţă de rezonanţă, frecvenţa corespunzătoare postului ales, iar circuitul „decupează" banda ce poartă informaţia, restul semnalelor fiind puternic atenuate.

Problemă rezolvată (3)

Un circuit serie cu rezistenţa $R = 3{,}5\ \Omega = 10\ \pi / 9\ \Omega$ este acordat pe frecvenţa de 900 kHz, iar lărgimea de bandă trebuie să fie $\Delta\upsilon = 9$kHz.

a) Ce inductanţă are bobina?

b) Calculaţi capacitatea pe care trebuie să o aibă condensatorul .

c) Presupunând că valoarea minimă a capacităţii condensatorului este 1/25 din cea calculată la b), aflaţi frecvenţa maximă de rezonanţă.

d) Care va fi valoarea factorului de calitate în acest caz?

e) Cu cât se va modifica lărgimea de bandă?

Rezolvare

a) Vom utiliza relaţiile $Q_f = \dfrac{\upsilon_0}{\Delta\upsilon} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ şi $\upsilon_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

Dacă substituim υ_0 în Q_f obţinem imediat $L = R / (2\pi\Delta\upsilon) = 6{,}17 \cdot 10^{-5}$H = 61,7μH.

b) Introducând expresia lui L în υ_0, vom afla $C = \Delta\upsilon/(2\pi\upsilon_0^2 R) = 5 \cdot 10^{-10}$ F = 500 pF.

c) Din formula (3.37) rezultă că dacă micşorăm capacitatea de n ori, frecvenţa de rezonanţă se măreşte de $\sqrt{n}$ ori, adică de 5 ori, devenind $\upsilon_0' = 4\ 500$ kHz = 4,5 MHz.

d) Factorul de calitate a avut iniţial valoarea $Q_{f0} = 900$ kHz / 9kHz = 100. Prin micşorarea capacităţii de n ori, conform (Q_f), factorul va creşte de $\sqrt{n}$ ori, devenind 500.

e) Lărgimea de bandă are expresia $\Delta\upsilon = R / (2\pi L)$ şi, în consecinţă, nu se modifică.

3.1.14. Câteva aplicaţii în practică ale proprietăţilor circuitelor de c.a.

Problemele pe care le vom rezolva mai jos au un dublu scop: antrenament în rezolvarea de probleme şi evidenţierea unor situaţii practice în care se pot folosi (şi se folosesc) concluziile acestora.

Problemă rezolvată (4)

O bobină cu rezistenţa R este alimentată la o tensiune U cu frecvenţa υ. Ce inductanţă L are bobina, dacă intensitatea curentului este de 10 ori mai mică decât cea care s-ar obţine alimentând-o cu tensiunea continuă U?

Rezolvare

O bobina reală poate fi considerată ca un circuit serie format dintr-o bobină ideală de inductanță L, legată în serie cu un rezistor de rezistență R. Pornim de la relația (3.33) în care va lipsi reactanța capacitivă $X_C = \frac{1}{\omega C}$. Această reactanță lipseşte ($X_C = 0$) întrucât lipseşte şi condensatorul din circuit, fiind înlocuit cu un conductor ideal (conductorul ideal are capacitatea infinită). Obținem pentru curent alternativ:

$$I_{\sim} = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^{\,2}}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}.$$

Pentru curent continuu putem folosi aceeaşi formulă, în care $X_L = 0$ (curentul continuu este un caz limită al celui alternativ $\omega = 0$), adică: $I_{=} = \frac{U}{R}$.

Utilizând condiția problemei, adică $I_{=} = 10 I_{\sim}$ obținem: $10R = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$.

Constatăm că: $(\omega L)^2 = 99R^2$, adică $\omega L \approx 10R$.

De aici va rezulta inductanța căutată: $L = 5\pi R/\nu$.

Concluzie: *Dacă printr-o bobină circulă simultan doi curenți, unul continuu şi altul alternativ, curentul continuu trece nestingherit, în timp curentul alternativ întâmpină o „rezistență" substanțială. Spunem că bobina* ***blochează*** *(limitează) componenta alternativă. Blocarea se produce fără pierdere de energie.*

Problemă rezolvată (5)

Se dă rețeaua din figura 3.32, în care generatorul produce simultan două tensiuni alternative, care au aceeaşi valoare efectivă, dar frecvențe diferite: $\upsilon_1 = \upsilon$ şi $\upsilon_2 = 10\ \upsilon$. Pentru frecvența υ sunt îndeplinite condițiile: $\omega L = R = 1 / (10\omega C)$. Notăm prin I_{L1} şi I_{L2} – intensitățile curenților cu cele două frecvențe care trec prin bobină, iar cu I_{C1} şi I_{C2} – pe cele care trec prin condensator. Să se calculeze rapoartele I_{L1}/I_{L2} şi I_{C2}/I_{C1}.

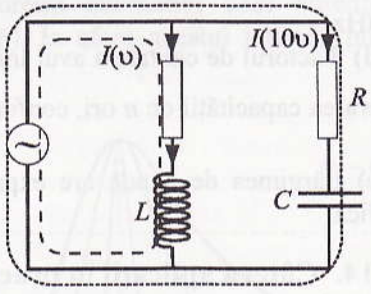


Fig. 3.32. Separarea componentelor de joasă (prin bobină) şi înaltă frecvență (prin condensator)

Rezolvare

Vom folosi pentru fiecare ramură $I_k = U/Z_k$, iar $Z_k = \sqrt{R^2 + X_k^2}$, indicele k fiind, pe rând: $L1$, $L2$, $C1$, $C2$.

Pentru $\nu_1 = \nu$:

$$X_{L1} = \omega_1 L = R;\ X_{C1} = 1 / (\omega_1 C) = 10R,$$

iar pentru $\upsilon_2 = 10\upsilon$: $X_{L2}=10\omega_1 L=10R$; $X_{C2}=1/(10\omega_1 C)=R$.

Impedanțele vor fi:

$$Z_{L1}=R\sqrt{2}=1{,}4R,\ Z_{L2}=R\sqrt{99}\approx 10\ R,\ Z_{C1}\approx 10R \text{ şi } Z_{C2}=1{,}4R.$$

Notând $I=U/R$, obținem pentru ramura inductivă:

$$I_{L1}=U/Z_{L1}=U/(R\sqrt{2})=0{,}7I,\ I_{L2}=0{,}1\ I \text{ şi } I_{L1}/I_{L2}=7.$$

Pentru ramura capacitivă

$$I_{C2}=0{,}7\ I,\quad I_{C1}=0{,}1\ I,\quad I_{C2}/I_{C1}=7.$$

Constatăm că prin ramura inductivă intensitatea cu frecvența 10υ reprezintă doar 14% din cea cu frecvența υ, iar în ramura capacitivă situația este inversă. Mai important este faptul că în condițiile problemei de față în ramura inductivă, spre exemplu, raportul puterilor active pentru υ şi $10\ \upsilon$ este aproape 50. Putem afirma că am realizat practic separarea frecvențelor cu ajutorul celor două ramuri. Filtrarea se accentuează pentru frecvențe mai mari de $10\ \upsilon$ şi respectiv mai mici de υ (spre exemplu $\upsilon = 0$, curent continuu).

Concluzie

Un circuit LR permite trecerea frecvențelor joase şi atenuează frecvențele înalte, în timp ce un circuit RC blochează frecvențele joase, favorizând trecerea frecvențelor ridicate.

Aplicații practice

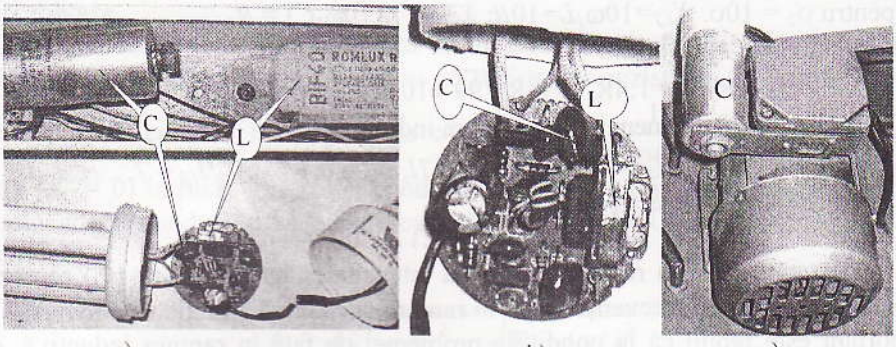
Atât problema 4 cât şi problema 5 stau la baza separării „componentelor" curenților în diverse rețele. Aceste componente pot fi: curent continuu şi curent alternativ, sau curent alternativ de joasă şi înaltă frecvență. Separarea poate fi efectivă (problema 5) sau să însemne doar interzicerea accesului într-o anumită porțiune de circuit a unei componente (eventual ocolirea porțiunii de circuit).

Alimentarea cu energie a amplificatoarelor atașate antenelor de recepție TV, amplasate la mare depărtare de receptoare, se realizează prin firele ce aduc semnalul de la antenă la receptor.

În aceste cazuri se realizează separarea componentei continue (I_1) de cea alternativă (I_2) la ambele capete ale liniei după o schemă asemănătoare cu cea din figura 3.32.

La alimentarea lămpilor fluorescente este necesară limitarea intensității curentului întrucât acestea au o rezistență foarte mică. Limitarea se poate realiza cu un rezistor, însă acesta consumă inutil energie. Drept urmare, lampa este legată în serie cu o bobină (fig. 3.33, a) (numită balast sau drosel), care limitează curentul, dar nu consumă energie.

O serie de motoare electrice de putere mică sunt concepute după principiul câmpului magnetic rotitor, obținut prin compunerea a două câmpuri perpendiculare (v. compunerea oscilațiilor mecanice perpendiculare). Pentru a se obține câmpul rotitor este necesar ca între câmpurile alternative să fie un defazaj (cât mai apropiat de $\pi/2$). Acest defazaj se obține prin înserierea unui condensator cu una din bobinele care produc câmpul rotitor. În figura 3.33, c este fotografia unui astfel de motor, în care se vede şi condensatorul de defazaj.



a) b) c)

Fig. 3.33. a) Partea de alimentare a unei lămpi fluorescente clasice (sus) comparată cu o lampă economică de aceeaşi putere (jos) L- balast, C- condensator pentru mărirea factorului de putere, b) convertizorul pentru alimentarea lămpii economice (detaliu), c) motor monofazat cu condensator

Pornind de la faptul că reacţantele bobinelor şi condensatoarelor depind de frecvenţa curentului alternativ, s-a găsit o cale ingenioasă de miniaturizare a aparaturii electronice şi electrotehnice: utilizarea curentului alternativ de „înaltă" frecvenţă, în locul curentului industrial de 50 Hz (pornind însă de la acesta). Cu ajutorul unor convertizoare de mici dimensiuni, bazate pe dispozitive semiconductoare (tranzistori etc.), curentul industrial este transformat în curent alternativ cu frecvenţa de 30–60 kHz. Acest curent este introdus în transformatoarele ce alimentează calculatoarele, televizoarele, aparatele de sudură, etc. Astfel, masa blocului de alimentare (în principal transformatorul şi condensatoarele) se micşorează foarte mult, întrucât valorile inductanţelor şi capacităţilor se micşorează de sute (mii) de ori. Evident, se reduce considerabil şi consumul de materiale.

O lampă fluorescentă clasică de 40W, împreună cu armătura de fixare şi dispozitivul de alimentare (bobina de balast şi condensatorul pentru mărirea lui cosφ), cântăreşte peste 1kg şi are lungimea de cca 1m. Lămpile economice actuale, funcţionând pe acelaşi principiu, la aceeaşi putere, dar cu convertizor (30 kHz) înglobat, au dimensiuni apropiate de ale unui bec cu incandescenţă, nu necesită armătură specială pentru montare şi cântăresc cca 100g. În figura 3.33 a), b) se pot compara între ele partea de alimentare a lămpii clasice şi lampa economică, cu tot cu convertizor.

Curenţii alternativi de înaltă frecvenţă (peste 30kHz) prezintă un fenomen interesant, numit efect pelicular. Un astfel de curent circulă prin conductoare doar printr-o pojghiţă (un strat subţire de la suprafaţa conductorului). Stratul se subţiază pe măsură ce se măreşte frecvenţa. Acest fenomen este folosit pentru încălzirea pieselor din oţel pentru călirea (doar) la suprafaţă. Cu ajutorul curenţilor de înaltă frecvenţă este încălzit doar stratul superficial al piesei, care apoi este răcit brusc în anumite soluţii. Metoda are mai multe avantaje, printre care şi economia de energie (nu trebuie încălzită toată masa oţelului). De asemenea, la frecvenţe înalte (IF) se ridică factorul de calitate al bobinelor, acoperind sârma de cupru a acestora cu un strat subţire de Ag. Curenţii de IF circulă doar prin stratul superficial de Ag care

prezintă o rezistență mai mică decât un strat echivalent de Cu (cuprul devine un simplu suport şi poate fi înlocuit cu altceva, spre exemplu oțel).

3.1.15.* Circuitul paralel

Considerăm circuitul din figura 3.34. în care bobina este ideală. În acest caz tensiunea este aceeaşi pentru toate elementele, drept care o alegem ca fazor de referință. Deşi curenții îşi schimbă în permanență sensurile, reprezentăm intensitățile cu ajutorul săgeților pentru a uşura scrierea ecuațiilor lui Kirchhoff. Fazorii intensităților pentru circuitul paralel sunt reprezentați în figura 3.35.

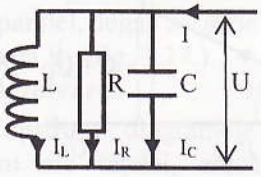


Fig. 3.34. Circuit RLC paralel cu bobină ideală

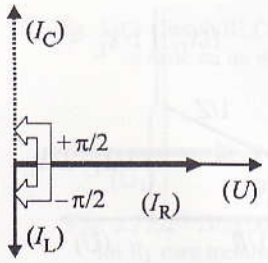


Fig. 3.35. Fazorii intensităților din circuitul paralel puşi în aceeaşi origine

Desenăm diagrama fazorială a curenților în ideea însumării acestora (teorema I a lui Kirchhoff), conform regulii poligonului:

(I) = (I_R) + (I_L) + (I_C) (fig. 3.36.)

Din diagramă rezultă că : $I^2 = I_R^2 + (I_C - I_L)^2$.

Înlocuind intensitățile $I_R = U/R$, $I_L = U/X_L$ şi $I_C = U/X_C$, obținem:

$$I = \sqrt{\left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{X_C} - \frac{U}{X_L}\right)^2} =$$

$$= U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} = \frac{U}{Z} \quad (3.43)$$

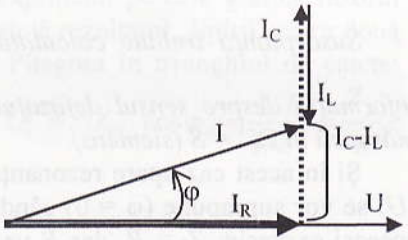


Fig. 3.36. Diagrama intensităților pentru un circuit paralel

în care

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \quad (3.44)$$

reprezintă impedanța acestui circuit paralel.

Defazajul dintre intensitate şi tensiune se află tot din triunghiul intensităților:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{I_C - I_L}{I_R} = \frac{\dfrac{1}{X_C} - \dfrac{1}{X_L}}{\dfrac{1}{R}} = \frac{\omega C - \dfrac{1}{\omega L}}{\dfrac{1}{R}} \qquad (3.45)$$

La fel ca şi în cazul circuitului serie, se pot construi: (fig. 3.36, a) diagrama conductanţei ($1/R$), a susceptanţelor ($1/X$) şi a admitanţei ($1/Z$), prin împărţirea laturilor diagramei 2.36 la U, precum şi diagrama puterilor (fig. 3.36, b.), în urma înmulţirii cu U.

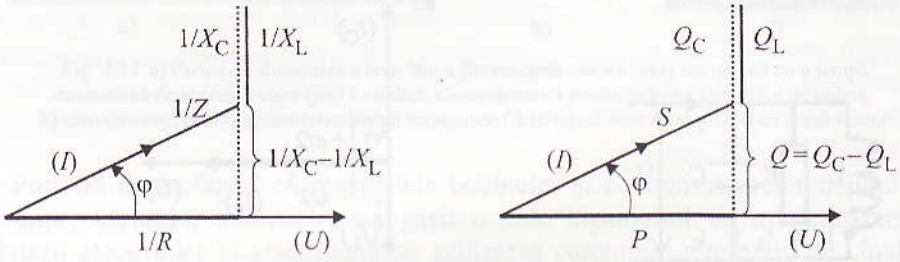


Fig. 3.36. a) Triunghiul susceptanţelor cu admitanţa rezultantă, la circuitul paralel

b) Triunghiul puterilor pentru circuitul paralel

Observaţie

Susceptanţa trebuie calculată mereu ca $\dfrac{1}{X_C} - \dfrac{1}{X_L}$ *pentru a nu se pierde informaţia despre sensul defazajului. Conductanţa, susceptanţa şi admitanţa se măsoară în* $\Omega^{-1} = S$ *(siemens).*

Şi în acest caz apare rezonanţa în aceleaşi condiţii ca la circuitul serie: (I) şi (U) se vor suprapune ($\varphi = 0$) când $X_C = X_L$. Impedanţa la rezonanţă va avea şi ea aceeaşi expresie: $Z_0 = R$, dar R va reprezenta de această dată valoarea maximă a impedanţei (la circuitul serie, impedanţa de rezonanţă este minimă). Dacă tensiunea U, care alimentează circuitul, este constantă, atunci la rezonanţă intensitatea curentului total este minimă. Intensitatea prin rezistor I_R este aceeaşi, indiferent de frecvenţă, I_L scade, iar I_C se măreşte la creşterea frecvenţei.

La rezonanţă avem $I_L = I_C$, motiv pentru care rezonanţa circuitului paralel se mai numeşte rezonanţa curenţilor.

Frecvenţa de rezonanţă va avea aceeaşi expresie (3.37) cu cea de la circuitul serie. Caracterul circuitului va fi inductiv la frecvenţe mici şi capacitiv la frecvenţe mari faţă de frecvenţa de rezonanţă.

Din figura 2.36, b observăm că între puteri se păstrează relaţia (3.42). Această relaţie rămâne valabilă pentru orice reţea.

3.1.16.* Rezolvarea rețelelor de c.a.

Rezolvarea rețelelor de c.a. se realizează pornind de la fazorii tensiunilor și intensităților, care trebuie corelați între ei și apoi însumați. Poate fi necesară rezolvarea separată a unor porțiuni din rețea și apoi unirea (lipirea) diagramelor pe baza fazorilor comuni.

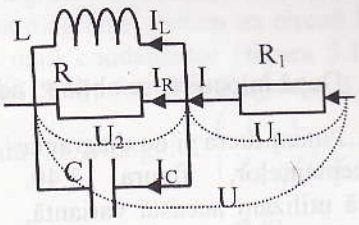


Fig. 3.37. Circuit RLC paralel, legat în serie cu un rezistor

Problemă rezolvată (6)

Să se găsească impedanța și defazajul tensiunii față de intensitate pentru un circuit RLC paralel, legat în serie cu un rezistor de rezistență R_1 (fig. 3.37.).

Fig. 3.11.a. Diagrama corespunzătoare lui R_1, care trebuie „legată" de cea a circuitului paralel

Rezolvare

Construim diagramele pentru cele două porțiuni ale rețelei, adică figurile 3.36 și 3.11. a.

Ținând cont că cele două porțiuni de circuit sunt legate în serie, este normal să considerăm (I) fazor de referință. Drept urmare, rotim diagrama 3.36 în sens orar cu unghiul φ, pentru a aduce (I) în poziție orizontală ca în figura 3.38. În continuare translatăm (U_2) în vârful lui (U_1) și exprimăm pe cale grafică fazorul (U), folosind regula poligonului. Figura 3.39. prezintă rezultatul „lipirii" celor două diagrame. Calculăm U cu ajutorul teoremei lui Pitagora în triunghiul de catete: $U_1 + U_2\cos\varphi_p$ și $U_2\sin\varphi_p$, punând $U_1 = IR_1$, $U_2 = IZ_p$, $\cos\varphi_p = \dfrac{1/R}{1/Z_p} = \dfrac{Z_p}{R}$,

$$\sin\varphi_p = Z_p\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right) \text{ și } Z_p = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \left(\dfrac{1}{X_C} - \dfrac{1}{X_L}\right)^2}}$$

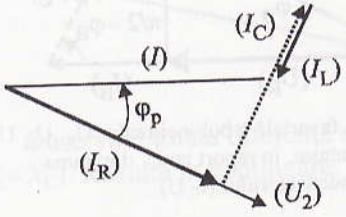


Fig. 3.38. Diagrama intensităților circuitului paralel, rotită cu $-\varphi_p$.

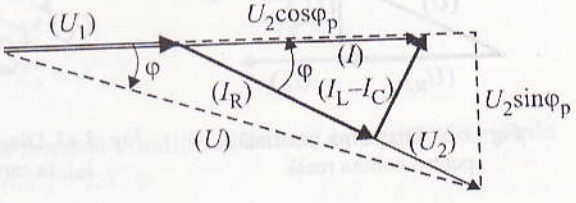


Fig. 3.39. Diagrama pentru obținerea lui *U* prin compunerea tensiunilor U_1 și U_2

$$U = I\sqrt{R_1^2 + 2\frac{R_1 Z_p^2}{R} + Z_p^2} = IZ$$

După înlocuire, se obține:, adică $Z = \sqrt{R_1^2 + 2\frac{R_1 Z_p^2}{R} + Z_p^2}$.

Putem lucra și cu diagrama susceptanțelor, figura 3.40. Dacă utilizăm această variantă, trebuie să ținem cont că la legarea diagramelor între ele se respectă aceleași reguli ca la diagramele de tensiuni sau intensități.

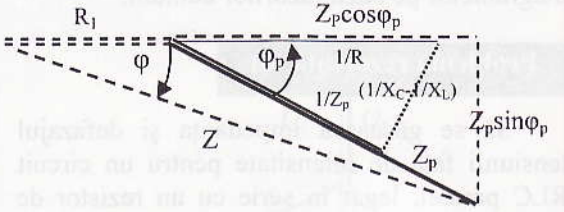


Fig. 3.40. Diagrama impedanțelor R_1 și Z_p, pentru obținerea lui Z

Defazajul se află foarte ușor:

$$\text{tg}\varphi = \frac{Z_p \sin\varphi_p}{R_1 + Z_p \cos\varphi_p}.$$

În continuare se înlocuiesc reactanțele și se află expresiile în funcție de pulsație (frecvență). Din expresia pentru tgφ se observă că rezonanța se obține tot în condițiile de mai sus: $X_L = X_C$. Exemplul următor demonstrează că această condiție nu este întotdeauna valabilă.

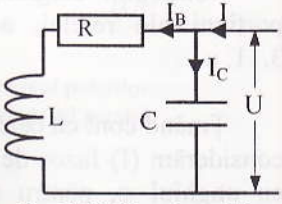


Fig. 3.41. Circuit paralel LC real

Problemă rezolvată (7)

O bobină reală, cu inductanța L și rezistența R, este legată în paralel cu un condensator de capacitate C. Să se afle impedanța circuitului la o frecvență oarecare, frecvența de rezonanță și impedanța lui la rezonanță.

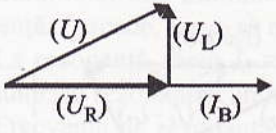


Fig. 3.42. Diagrama fazorială pentru bobina reală

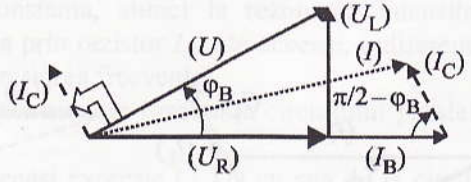


Fig. 3.43. Diagrama fazorială a bobinei reale (U_R, U_L, U, I_B), la care s-a atașat, în raport cu U, diagrama condensatorului (I_C,U)

Rezolvare

Pentru circuitul din figura 3.41. desenăm diagrama intensităților I, I_C și I_B, figura 3.43. Această diagramă rezultată din legarea diagramei pentru un circuit LR serie (bobina reală – figura 3.42) cu diagrama unui condensator (figura 3.13), alimentate la aceeași tensiune. În locul diagramei 3.43. folosim diagrama 3.44. Pornind de la teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul $\left(\frac{1}{Z_B}, \frac{1}{Z}, \frac{1}{X_C}\right)$, obținem:

$$\frac{1}{Z}=\sqrt{\frac{1}{Z_B^2}+\frac{1}{X_C^2}-\frac{2}{X_C Z_B}\cos(\pi/2-\varphi_B)}$$

sau: $$\frac{1}{Z}=\sqrt{\frac{1}{Z_B^2}+\frac{1}{X_C^2}-\frac{2}{X_C Z_B}\sin\varphi_B}\ .$$

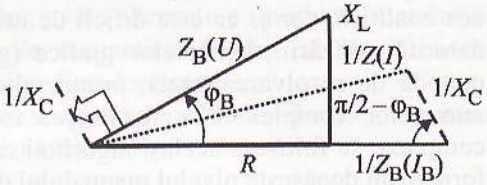


Fig. 3.44. Diagrama impedanței Z_B și a admitanțelor pentru fig. 3.41, 3.42

Ținând cont că (fig. 3.43) $\sin\varphi_B = X_L/Z_B$, iar $Z_B=\sqrt{R^2+X_L^2}$, obținem:

$$Z=\frac{X_C\sqrt{R^2+X_L^2}}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}}\ . \qquad (3.46)$$

Pentru aflarea frecvenței de rezonanță trebuie să utilizăm condiția ca **tensiunea și intensitatea să fie în fază**. Pe diagrama 3.44, aceasta va însemna că Z_B, adică (U), și $1/Z$, adică (I), se vor suprapune așa cum se vede în figura 3.45.

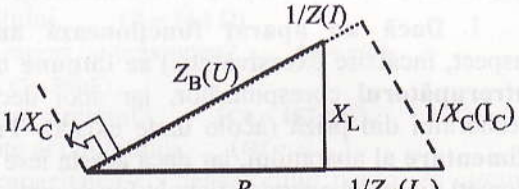


Fig. 3.45. Diagrama circuitului LC real la rezonanță: (I) și (U) sunt suprapuse

Din asemănarea triunghiurilor (R, X_L, Z_B) și $(\frac{1}{Z_B}, \frac{1}{Z}, \frac{1}{X_C})$ obținem: $\frac{X_L}{Z_B}=\frac{\frac{1}{X_C}}{\frac{1}{Z_B}}=\frac{Z_B}{X_C}$,

sau $Z_B^2 = X_L X_C$.

Observăm totala diferență dintre această condiție și cea de la circuitele simple (X_L=X_C). Rezultă în continuare: $R^2+(\omega L)^2=L/C$ și

$$\omega_{rez}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}\ . \qquad (3.47)$$

Observație. La circuitul paralel LC real, este posibil ca rezonanța să nu aibe loc, dacă rezistența bobinei (eventual înseriată cu aceasta) este prea mare.

Impedanța la rezonanță se va obține înlocuind ω_{rez} în (2.46). Obținem:

$$Z = \frac{L}{RC} = R\frac{L}{R^2C} = RQ_f^2, \tag{3.48}$$

unde $Q_f = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ este factorul de calitate (o nouă semnificație).

Abordarea fazorială a circuitelor de curent alternativ este mai intuitivă decât cea analitică, dar și ea este dificil de utilizat în circuitele mai complicate, tocmai datorită utilizării elementelor grafice (geometrice). Mult mai rapidă este o altă metodă de rezolvare bazată, printre altele, pe reprezentarea vectorilor în planul numerelor complexe. La rezolvarea circuitelor de c.a. cu ajutorul numerelor complexe se folosesc aceiași algoritmi ca și în cazul circuitelor de c.c., însă acest formalism depășește nivelul manualului de față.

3.1.17. Câteva reguli de protecție, legate de utilizarea aparatelor electrice alimentate în c.a

Utilizarea energiei electrice (mai ales de la rețeaua publică) necesită cunoașterea și respectarea câtorva reguli elementare de protecție (atât a persoanei proprii cât și a celor din jur, sau a bunurilor).

1. **Dacă un aparat funcționează anormal** (vibrații puternice, zgomot suspect, încălzire excesivă etc.) **se impune oprirea imediată** a acestuia **folosind întrerupătorul** corespunzător, iar apoi decuplarea de la rețea, prin scoaterea ștecherului din priză (acolo unde există). **Trageți de ștecher, nu de cablul de alimentare** al aparatului, iar dacă acesta iese cu greutate, țineți priza cu mâna. Nu scoateți din priză aparate aflate în funcțiune!

2. Dacă aparatul este prevăzut cu legătură de împământare (ștecher șuco) folosiți pe cât posibil doar prize prevăzute cu legătură la pământ. În cazul în care rețeaua nu este prevăzută cu astfel de prize, evitați folosirea acestor aparate în încăperi cu pardoseală din pământ, beton sau cu linoleum aplicat pe beton. În astfel de incinte evitați contactul cu părțile metalice ale aparatelor.

3. În încăperi cu umiditate excesivă (băi, subsoluri) nu folosiți aparate electrice (inclusiv lămpi portabile) alimentate direct de la rețea. În asemenea situații este obligatorie utilizarea unor transformatoare de separație.

4. Nu intrați în contact simultan cu părți metalice ale aparatului și alte aparate metalice, instalații de încălzire, gaze, apă etc. Există **pericol de electrocutare!** Aceste precauții sunt necesare întrucât rețeaua nu este izolată de pământ (întotdeauna există un conductor de alimentare al rețelei legat la pământ).

5. Nu deschideți carcasele aparatelor, chiar oprite, dacă sunt cuplate la rețea.

6. Nu încercați remedierea defecțiunilor în timpul funcționării aparatelor.

7. Dacă, dintr-un motiv oarecare, s-a ars siguranța fuzibilă a rețelei, înlocuirea acesteia trebuie făcută abia după remedierea defecțiunii (dacă nu s-a ars accidental), cu una de același calibru (intensitate).

8. Nu folosiți siguranțe supradimensionate, sau improvizate, pot genera accidente și incendii.

9. Dacă un aparat se oprește inopinat, nu încercați să „îl convingeți" să pornească din nou cu metode brutale, sau în poziții neadecvate.

10. Citirea atentă a instrucțiunilor de folosire a aparatelor achiziționate ne poate scuti de multe surprize neplăcute.

11. Unele aparate produc câmpuri magnetice alternative (motoare, monitoare, televizoare) ce pot deteriora înregistrările magnetice. Evitați să lăsați casete, dischete, carduri pe aceste aparate, sau în imediata lor apropiere.

12. Nu lăsați să funcționeze nesupravegheate aparatele electrice de mare putere (plite, cuptoare și radiatoare electrice etc).

Probleme propuse

Problemele de mai jos sunt probleme cu cerințe multiple (cascade), probleme diferite care pornesc de la aceleași date.

1. Un circuit serie are, la frecvența $\nu = 100$ Hz, următoarele caracteristici: $R = 10\ \Omega$, $X_L = 10\ \Omega$ și $X_C = 20\ \Omega$ ($\pi^2 = 10$).

1.1. Desenați diagrama fazorială a circuitului.

1.2. Calculați impedanța circuitului. **($Z = 14{,}1\ \Omega$)**

1.3. Ce fază are intensitatea în raport cu tensiunea? **($\varphi = \pi/4$)**

1.4. Aflați L și C. **($L = 16$mH, $C = 80\mu$F)**

1.5. Ce capacitate echivalentă are circuitul? **($C_e = 157\ \mu$F)**

1.6. Calculați factorul de calitate al circuitului. **($Q_f = \sqrt{2}$)**

1.7. Cum trebuie modificată capacitatea condensatorului pentru ca circuitul să intre în rezonanță? **($C' = C/2$)**

1.8. Cum trebuie modificată lungimea bobinei (solenoid fără miez) pentru ca circuitul să intre în rezonanță? ($L = \mu_0\mu_r N^2 S/l$, notațiile fiind cele din manual) **($l' = l/2$)**

1.9. De câte ori crește intensitatea la rezonanță, față de cea inițială? **($I_0/I = \sqrt{2}$)**

1.10. De câte ori crește puterea disipată la rezonanță, față de cea inițială **($P_0/P = 2$)**

2. Un circuit serie are, la frecvența $\upsilon = 100$ Hz, următoarele caracteristici: $R = 10\ \Omega$, $X_L = 10\ \Omega$ și $X_C = 20\ \Omega$. Circuitul este alimentat cu o tensiune alternativă având frecvența $\upsilon_1 = 200$ Hz ($\pi^2 = 10$).

2.1. Calculați noile valori pentru R, X_L și X_C. **($R = 10\Omega$; $X_{L1} = 20\Omega$; $X_{C1} = 10\Omega$)**

2.2. Desenați diagrama fazorială a circuitului.

2.3. Calculați impedanța circuitului. **($Z = 14{,}1\ \Omega$)**

2.4. Ce fază are intensitatea în raport cu tensiunea? **($\varphi = -\pi/4$)**

2.5. Ce inductanță echivalentă are circuitul? **($L_e = 7{,}8$ mH)**

2.6. Calculați factorul de calitate al circuitului. **($Q_f = \sqrt{2}$)**

2.7. Cum trebuie modificată capacitatea condensatorului pentru ca circuitul să intre în rezonanță? **($C' = C/2$).**

2.8. Cum trebuie modificată lungimea bobinei (solenoid fără miez) pentru ca circuitul să intre în rezonanță? ($L = \mu_0\mu_r N^2 S/l$, notațiile fiind cele din manual) ($l' = l/2$)

2.9. De câte ori crește intensitatea la rezonanță, față de cea inițială? ($I_0/I = \sqrt{2}$)

3. Un aparat electric are următoarele caracteristici nominale: U = 220 V, υ = 50 Hz, P = 1,1 kW, cosφ = 0,8 inductiv.

3.1. Care este puterea aparentă a acestui aparat? (S=1375 VA)

3.2. Care este puterea reactivă? (Q=825 var)

3.3. Ce intensitate nominală are curentul prin aparat? (I=6,25 A)

3.4. Cât este impedanța aparatului? (Z=35,2 Ω)

3.5. Ce rezistență are aparatul? (R=28,16 Ω)

3.6. Ce capacitate trebuie să aibă un condensator legat în serie cu aparatul pentru a se obține un factor de putere cosφ'=1? (C=150 μF)

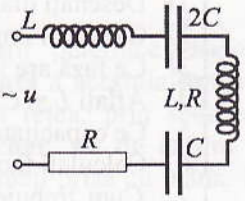
3.7. Ce intensitate va străbate aparatul la rezonanța serie? (I_0=7,81 A)

3.8. Ce putere va consuma aparatul la rezonanța serie? (P_0 = 1,7 kW)

3.9. *Pentru a se micșora pierderile de energie pe linia de alimentare este necesară mărirea factorului de putere prin introducerea unui condensator. De ce condensatorul trebuie legat în paralel cu consumatorul și nu în serie?

3.10. *Ce capacitate trebuie să aibă un condensator pus în paralel pentru a aduce factorul de putere la valoarea 1? (v. problema rezolvată 7) (C = 53,5 μF)

4. Se consideră circuitul de mai jos, în care ωL = 1/ωC = R, la frecvența de alimentare.



4.1. Desenați diagrama fazorială corespunzătoare circuitului.

4.2. Ce rezistență are circuitul? (Re = 2 R)

4.3. Care este reactanța sa? (Xe = 0,5 R)

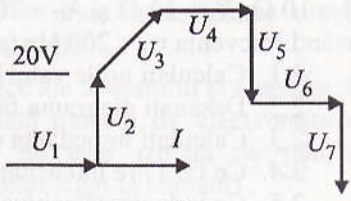
4.4. Calculați impedanța circuitului. (Z = R $\sqrt{17}$ /2)

4.5. Cât este factorul de putere? (cosφ = 4/ $\sqrt{17}$)

4.6. De câte ori trebuie micșorată frecvența de alimentare pentru ca circuitul să intre în rezonanță? ($\upsilon_0 = \upsilon\sqrt{3}$ /2)

4.7. Ce condensator ar trebui legat în serie cu circuitul pentru a se obține rezonanța la frecvența de alimentare? (C1 = 2C)

5. În diagrama fazorială alăturată toate segmentele au aceeași lungime, iar intensitatea curentului este I = 2A (unghiurile sunt 90° sau 45°).



5.1. Aflați tensiunea de alimentare a circuitului pe cale grafică. (U = 148 V)

5.2. Desenați circuitul corespunzător diagramei

5.3. Aflați rezistența circuitului. (R = 74 Ω)

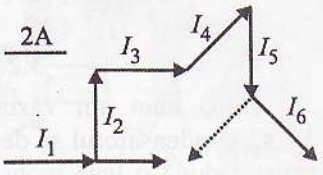
5.4. Ce reactanță are circuitul? (X = –12Ω)

5.5. Desenați o diagramă simplificată (triunghi) la aceeași scară.

5.6. Calculați impedanța circuitului și comparați-o cu cea găsită grafic pe diagrama simplificată.

5.7. Pentru a se obține rezonanța, frecvența trebuie mărită sau micșorată?

6. În diagrama fazorială alăturată toate segmentele au aceeași lungime, iar tensiunea este $U = 60V$ (unghiurile sunt 90° sau 45°).



6.1. Aflați intensitatea curentului pe cale grafică.

6.2. Desenați circuitul corespunzător diagramei.

6.3. Aflați rezistența circuitului. **(R = 4,4Ω)**

6.4. Ce reactanță are circuitul? **(X = 0Ω)**

6.5. Desenați o diagramă simplificată (triunghi) la aceeași scară.

6.6. Calculați impedanța circuitului și comparați-o cu cea găsită grafic pe diagrama simplificată.

6.7. Pentru a se obține rezonanța, frecvența trebuie mărită sau micșorată?

6.8. Este posibil ca un fazorul I_6 din această figură să arate ca cel punctat?

3.2. OSCILAȚII ELECTROMAGNETICE

3.2.1. Descărcarea condensatorului

După cum am văzut în paragraful 3.1.4., condensatorul se descarcă printr-un rezistor după o lege monotonă (exponențială), tensiunea tinzând către 0 cu o viteză ce depinde de rezistența rezistorului. Dacă însă condensatorul se descarcă pe o bobină, tensiunea la bornele condensatorului (și intensitatea curentului) capătă un caracter oscilant. Pentru a studia diferența de comportament, se realizează un experiment conform figurii 3.46. Condensatorul C (100μF) se încarcă prin închiderea pentru scurt timp a întrerupătorului K1. După închiderea lui K2, osciloscopul (sincronizare internă) va reprezenta variația tensiunii condensatorului la descărcarea sa prin rezistorul R. Figura 3.47. ilustrează descărcarea condensatorului prin două rezistențe diferite (2 și 10 kΩ). Dacă, după încărcarea condensatorului, vom închide K3 descărcarea se va desfășura total diferit, așa cum se vede în fig 3.48. Prezența bobinei L (2x500 spire cu miez complet) în circuitul de descărcare al condensatorului duce la apariția unor oscilații ale tensiunii (și intensității). Aceste oscilații sunt amortizate de rezistența electrică a circuitului. Cu

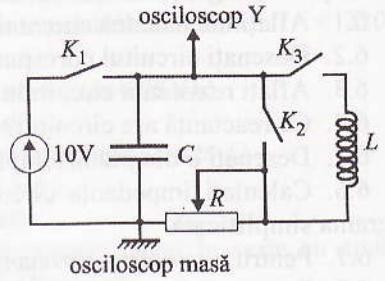


Fig 3.46. Vizualizarea pe osciloscop a descărcării condensatorului prin rezistor (K2) sau prin bobină (K3)

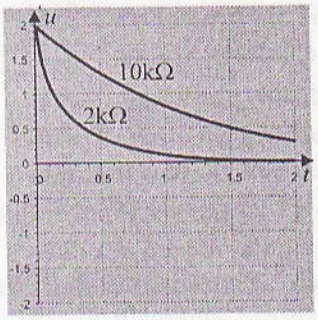


Fig. 3.47. Descărcarea aperiodică a condensatorului

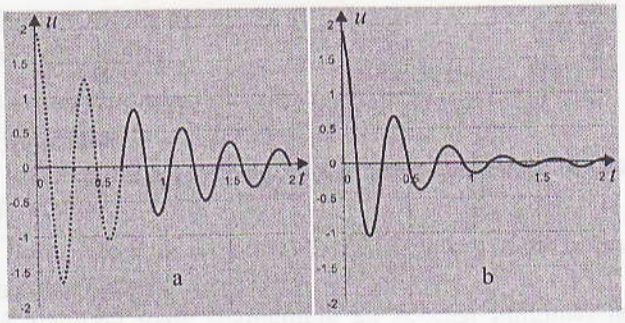


Fig. 3.48. Descărcarea condensatorului pe o bobină a) slab amortizată; b) puternic amortizată

cât rezistența R este mai mare, cu atât oscilațiile se sting mai repede (fig. 3.48, b). După modul în care se comportă tensiunea și intensitatea avem de a face cu un analog electric al oscilatorului armonic (mecanic) amortizat. Rolul elementului elastic revine condensatorului, în timp ce bobina preia rolul elementului inerțial. Rezistorul reprezintă frecările vâscoase. Oscilațiile tensiunii și ale intensității în acest circuit se numesc oscilații electromagnetice, iar circuitul este numit circuit oscilant. În figura 3.49. sunt reprezentate opt stadii ale unei oscilații electromagnetice complete (pierderile de energie sunt neglijate).

Inițial condensatorul este încărcat la tensiunea maximă (a), intensitatea curentului este 0 (datorită autoinducției, intensitatea nu poate atinge în acest moment valoarea maximă). Intensitatea crește treptat (b), iar tensiunea se micșorează prin plecarea sarcinilor de pe condensator. Când toată sarcina a plecat pe circuit (u=0), intensitatea atinge valoarea maximă (c). În continuare, datorită autoinducției, curentul circulă în același sens (cu toate că tensiunea este 0) și începe reîncărcarea condensatorului, cu o polaritate inversată față de cea inițială (d). Pe măsură ce se acumulează sarcina pe armături, intensitatea curentului se micșorează, devenind nulă atunci când condensatorul s-a (re)încărcat complet (e). Din acest moment fenomenele se repetă, dar în sens contrar (f,g,h), până la revenirea în starea inițială. Graficele din figura 3.50, ilustrează variația în timp a tensiunii și intensității curentului prin circuit. Constatăm că între curent și tensiune este un defazaj de $\pi/2$, care asigură schimbul de energie dintre bobină și condensator. (Despre aceste schimburi energetice s-a menționat în paragraful 3.1.5.)

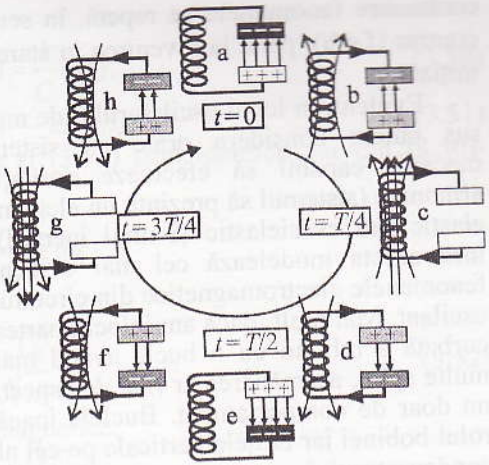


Fig. 3.49. Desfășurarea unei oscilații electromagnetice

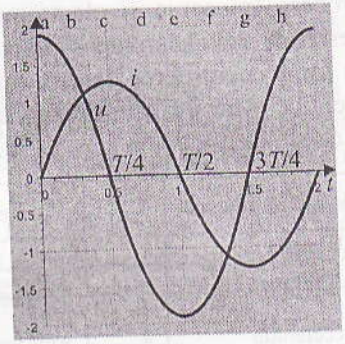


Fig. 3.50. Oscilațiile tensiunii și intensității sunt defazate cu $\pi/2$

3.2.2 Analogie între mărimile mecanice și cele electrice

Un sistem mecanic, în care au loc oscilații armonice foarte asemănătoare celor descrise mai sus, a fost studiat în cap. I (vezi problema 6, pag. 13). După cum se vede în ciclul de figuri 3.51, rolul sarcinilor electrice este jucat de lichidul din tub, brațele tubului reprezintă condensatorul, iar partea îndoită, bobina.

Inițial (a) denivelarea (presiunea) este maximă iar lichidul este în repaus (lichidul abia pornește). Viteza crește treptat (b), iar presiunea (masa de lichid denivelat) scade, prin plecarea lichidului în exces. Când diferența de nivel (presiunea) devine 0 (toată masa din denivelare a plecat pe traseu), viteza lichidului devine maximă (c). Cu toate că presiunea este 0, lichidul continuă să se deplaseze în același sens (datorită inerției), generând o nouă denivelare, de sens opus (d). Pe măsură ce lichidul se acumulează în ramura dreaptă, viteza se micșorează, devenind 0 când diferența de nivel (presiunea) atinge valoarea maximă (e). În

continuare fenomenele se repetă, în sens contrar (f,g,h), până la revenirea în starea inițială.

Evident, în locul oscilatorului de mai sus putem considera orice alt sistem mecanic capabil să efectueze oscilații armonice (sistemul să prezinte un element elastic sau cvasielastic şi unul inerțial), însă acesta modelează cel mai evident fenomenele electromagnetice din circuitul oscilant. Mai mult, dacă am înlocui partea curbată a tubului cu o buclă având mai multe spire, asemănarea ar fi şi de aspect, nu doar de comportament. Buclele joacă rolul bobinei iar brațele verticale pe cel al condensatorului.

După cum se observă, cele două procese (mecanic şi electromagnetic) au descrieri asemănătoare – practic identice.

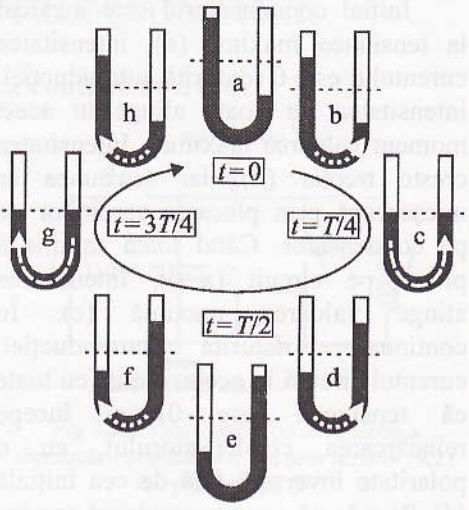


Fig. 3.51. Oscilațiile armonice ale unei coloane de lichid

În fond, ecuațiile ce descriu mişcarea armonică şi oscilațiile electromagnetice sunt identice. Mai jos este prezentat un tabel de corespondențe între mărimile electrice şi cele mecanice, din care va rezulta caracterul identic al acestor ecuații.

Mărimi mecanice	Simbol	Definiție	Mărimi electrice	Simbol	Definiție
Elongația	x		Sarcina	q	
Viteza	v	$\Delta x/\Delta t=x'(t)$	Intensitatea	i	$\Delta q/\Delta t=q'(t)$
Accelerația	a	$\Delta v/\Delta t=v'(t)=x''(t)$	Viteza de variație a intensității	$\Delta i/\Delta t$	$\Delta i/\Delta t=i'(t)=q''(t)$
Constanta elastică (cvasielastică)	k	F/x	Inversa capacității	1/C	U/q
Masa	m		Inductanța	L	
Forța	F	$F = ma = mx''(t)$ $F_e = -kx$	Tensiunea (electromotoare)	e ,U	$e = -L\Delta i/\Delta t = -Lq''(t)$ $U=q/C$
Energia cinetică	E_c	$E_c=mv^2/2$	Energia magnetică	W_B	$W_B=Li^2/2$
Energia elastică	E_e	$E_e=kx^2/2$	Energia electrică	W_E	$W_E=q^2/2C$

Pentru oscilatorul armonic ecuația legii a doua a lui Newton este: $F = m \cdot a$, unde $F = -k \cdot x$, iar $a=v'(t)=x''(t)$.

Înlocuind, obținem:

$$m \cdot x''(t) = -k \cdot x(t) \quad \text{sau} \quad (\omega^2 = k/m)$$
$$x''(t) = -\omega^2 \cdot x(t). \tag{3.49}$$

Pentru circuitul oscilant ideal, din teorema a II-a a lui Kirchhoff obținem:

$$e = q/C, \qquad \text{unde} \qquad e = -Li'(t) = -Lq''(t),$$

adică

$$-Lq''(t)=\frac{1}{C}q(t), \tag{3.50}$$

sau

$$q''(t)=-\omega^2\cdot q(t). \tag{3.51}$$

După cum se vede, ecuațiile (3.49) și (3.51) sunt identice, iar din (3.50)-(3.51) rezultă pulsația proprie:

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\omega_0$$

(analog cu

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}), \tag{3.52}$$

sau perioada proprie a oscilațiilor electromagnetice:

$$T=2\pi\sqrt{LC}$$

(analog cu

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}). \tag{3.53}$$

Pulsația proprie a circuitului oscilant coincide cu pulsația de rezonanță a circuitului LC, obținută anterior (ω rez). Aceeași formulă se obține impunând condiția ca energia reactivă inductivă să fie egală cu cea capacitivă (puterile reactive să fie egale):

$$I^2X_L=I^2X_C \Rightarrow (3.52).$$

Pornind de la identitatea ecuațiilor mecanice (3.49) și electromagnetice (3.50), putem scrie ecuațiile oscilațiilor electromagnetice prin analogie cu cele de la oscilațiile mecanice:

– echivalentul elongației $q=Q_m\sin(\omega_0 t+\varphi)$ sau $u=U_m\sin(\omega_0 t+\varphi)$ (3.53)

– al vitezei $i=\omega_0 Q_m\sin(\omega_0 t+\varphi)=I_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$ (3.54)

La un circuit oscilant real, în care rezistența electrică disipă energia, oscilațiile își micșorează treptat amplitudinea, după o lege exponențială. Amortizarea crește cu rezistența electrică, dar depinde și de inductanța circuitului. În problema rezolvată (7) am obținut pulsația de rezonanță (3.47), din care decurgea că rezonanța nu era totdeauna posibilă (condiția era $\frac{1}{LC}>\frac{R^2}{L^2}$). Acum putem justifica acest fapt. Dacă rezistorul consumă energia inițială a condensatorului într-un timp mai scurt decât o semiperioadă

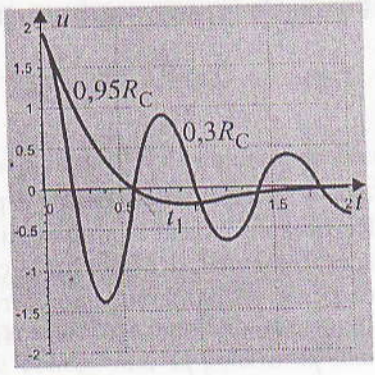


Fig. 3.52. Oscilații amortizate

ideală, bobina nu mai are ce acumula pentru inițierea următoarei semiperioade și, în consecință, oscilația se stinge înainte de a se naște. Pentru ca într-un circuit oscilant să poată apărea oscilații, condiția este mai restrictivă: $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$, adică pulsația proprie $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ (de rezonanță) trebuie să fie mai mare decât semilărgimea de bandă $\frac{R}{2L}$. (Acest lucru înseamnă, evident, că limita inferioară a benzii ½ nu poate fi negativă). *Circuitul oscilant nu face altceva decât că selectează și favorizează evoluția acelor perturbații electrice sau magnetice a căror frecvență este apropiată sau egală cu frecvența proprie (intră în rezonanță).*

Oscilațiile electromagnetice se pot iniția doar dacă rezistența circuitului este mai mică decât o valoare critică $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Oscilogramele din figura 3.52 ilustrează diferența dintre oscilațiile electromagnetice, în cazul unei amortizări moderate ($R = 0{,}3R_c$) și al uneia puternice ($R = 0{,}95R_c$). Din această figură mai constatăm că perioada circuitului real este influențată și de rezistența sa electrică: până la momentul t_1 oscilația slab amortizată parcurge trei sferturi de ciclu (descărcare, reîncărcare și din nou descărcare) în timp ce în oscilația subcritică este parcurs doar un sfert (condensatorul apucă doar să se descarce).

Problemă rezolvată (8)

La bornele unei bobine cu inductanța L se cuplează un condensator de capacitate C, încărcat cu tensiunea U_m. a) Calculați amplitudinea intensității curentului prin acest circuit oscilant. b) Considerând că în circuit se introduce o rezistență R, evaluați energia disipată și variația relativă a energiei într-o perioadă.

Rezolvare

a) Pornim de la conservarea energiei

$$W_E = W_B \Rightarrow \quad \frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \Rightarrow I_m = U_m\sqrt{\frac{C}{L}},$$

sau

$$I_m = U_m / X_0,$$

unde X_0 este reactanța caracteristică (v. problema 2).

b) Rezolvarea exactă a problemei pierderilor în circuitul oscilant depășește limitele acestui manual, dar în cazul în care $R << X_0$ se poate evalua destul de precis căldura degajată pe parcursul unei perioade. Considerând pierderea suficient de mică, intensitatea efectivă va fi practic constantă într-o perioadă (prima): $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = U_m\sqrt{\frac{C}{2L}}$, iar căldura degajată $Q = -\Delta W = RI^2T$ va fi:

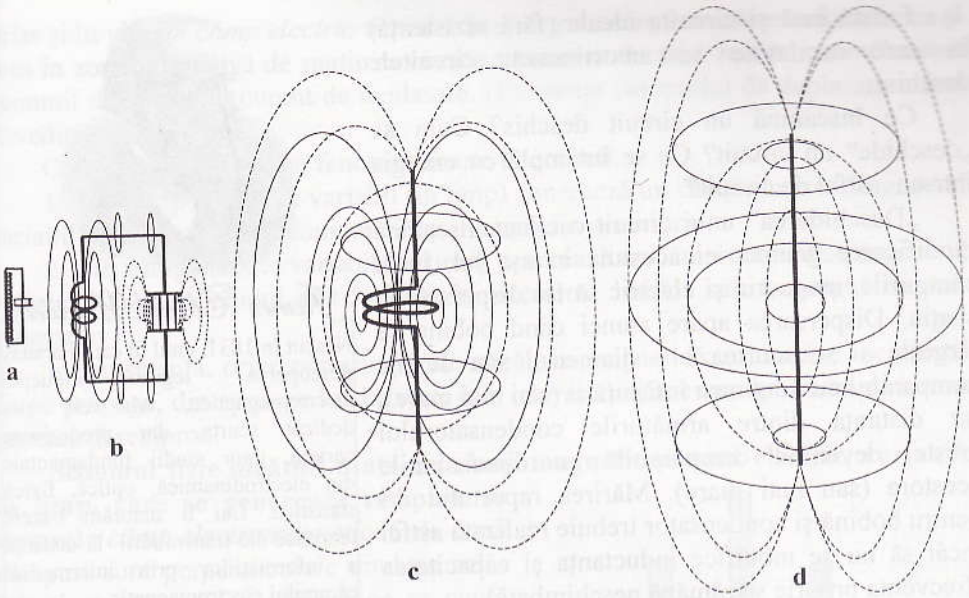


Fig. 3.53 Trecerea de la circuitul oscilant închis (a) la antena (d).
Punctat sunt reprezentate liniile electrice, continuu- cele magnetice.
(Dacă desenul (a) este la scara 1:1, atunci (d) trebuie considerat la scara 1:100)

$$-\Delta W = RU_m^2 \frac{C}{2L} \cdot 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi \cdot \frac{CU_m^2}{2} \cdot R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

În această relație am grupat factorii: $\frac{CU_m^2}{2} = W_0$ – energia inițială, $R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q_f}$ – inversul factorului de calitate. În felul acesta obținem pierderea de energie pe parcursul unei perioade: $\Delta W = -2\pi \frac{W_0}{Q_f}$ și pierderea relativă de energie într-o perioadă: $\frac{\Delta W}{W_0} = -\frac{2\pi}{Q_f}$.

Descoperim astfel și o altă semnificație a factorului de calitate, ce decurge din ultima relație: el este invers proporțional cu pierderea relativă de energie într-o perioadă.

3.2.3. Circuitul oscilant deschis

Circuitul oscilant alcătuit din bobină și condensator ideale este numit circuit închis. „Închis" în sensul că energia este concentrată în interiorul său: câmpul magnetic este localizat doar în interiorul bobinei (considerată solenoid), iar cel electric în interiorul condensatorului (sunt neglijate câmpurile de dispersie). Dacă ar lipsi rezistența electrică, într-un astfel de circuit oscilațiile s-ar desfășura un timp nelimitat.

Există însă şi circuite ideale (fără rezistenţă) în care oscilaţiile se amortizează: circuitele deschise.

Ce înseamnă un circuit deschis? Cum se „deschide" un circuit? Ce se întâmplă cu energia într-un astfel de circuit?

„Deschiderea" unui circuit oscilant înseamnă modificarea geometriei acestuia în aşa fel, încât câmpurile, magnetic şi electric să fie dispersate în spaţiu. Dispersarea apare atunci când bobina se lărgeşte şi se scurtează – diametrul său devine comparabil cu lungimea înfăşurării (sau mai mare), iar distanţa dintre armăturile condensatorului creşte, devenind comparabilă cu dimensiunile acestora (sau mai mare). Mărirea raportului d/l pentru bobină şi condensator trebuie realizată astfel încât să nu se modifice inductanţa şi capacitatea (frecvenţa proprie să rămână neschimbată).

James Clerk Maxwell

Născut în 1831, anul în care Faraday descoperea legile inducţiei electromagnetice, Maxwell şi-a dedicat scurta, dar prodigioasa carieră, unor studii fundamentale din electrodinamică, optică, fizică statistică. Lui îi datorăm bazele teoretice ale transmiterii la distanţă a informaţiilor prin intermediul câmpului electromagnetic.

În figura 3.53 sunt reprezentate câteva stadii ale „deschiderii" unui circuit oscilant. Deschiderea câmpurilor în spaţiu conduce la apariţia unei noi entităţi, deosebit de importante: **câmpul electromagnetic.** Acest câmp nu reprezintă o simplă superpoziţie a unui câmp electric cu unul magnetic. El este un sistem fizic cu proprietăţi total diferite de ale celor două componente ale sale.

3.3. CÂMPUL ELECTROMAGNETIC

După cum s-a explicat în clasa a X-a, la capitolul de inducţie electromagnetică, t.e.m. de inducţie apare atunci când are loc o variaţie de flux magnetic, indiferent dacă circuitul este închis sau deschis şi indiferent de cauza variaţiei fluxului. Mai mult, *dacă inducţia magnetică B suferă o variaţie*, atunci în jurul liniilor de câmp magnetic *apare un câmp electric* de inducţie (ca şi cum ar exista o spiră). Acest câmp, spre deosebire de cel electrostatic, are liniile de câmp închise, în interiorul lor aflându-se liniile câmpului magnetic generator.

Tot în clasa a X-a a fost descrisă producerea câmpului magnetic de către curentul electric staţionar. Acest câmp are liniile închise în jurul curentului electric generator. Maxwell a arătat, în secolul al XIX-lea, că un câmp magnetic poate fi produs nu numai de curentul de conducţie (mişcarea ordonată a unor sarcini electrice). El a descoperit că,

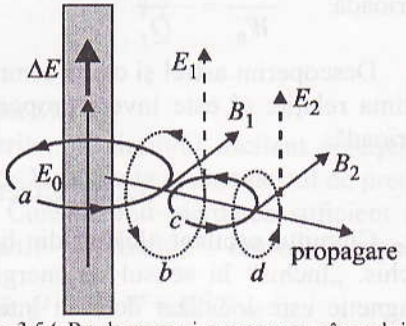


Fig. 3.54. Producerea şi propagarea câmpului electromagnetic

chiar şi în vid, *un câmp electric variabil în timp generează un câmp magnetic*, ca şi cum în zona respectivă de spaţiu ar circula un curent electric. Acest „curent" a fost denumit de Maxwell curent de deplasare. (Existenţa curentului de deplasare a fost dovedită experimental).

Constatăm că apare un fenomen foarte interesant:

1. Un câmp magnetic variabil (în timp) generează un câmp electric (în general variabil), ale cărui linii înconjură câmpul magnetic generator.

2. Un câmp electric variabil (în timp) generează un câmp magnetic (în general variabil), care la rândul său închide în interiorul liniilor sale câmpul electric generator.

În consecinţă, orice perturbaţie electrică sau magnetică nu rămâne localizată. Ea se propagă, din aproape în aproape, prin intermediul acestor două câmpuri ce se generează reciproc.

Sistemul fizic alcătuit dintr-un câmp magnetic şi unul electric, variabile în timp, care se generează reciproc se numeşte *câmp electromagnetic*. Cele două câmpuri sunt perpendiculare unul pe celălalt şi se propagă pe măsură ce se generează.

Propagarea unei perturbaţii electromagnetice prin intermediul câmpului electromagnetic reprezintă o undă electromagnetică.

Presupunem că într-un conductor (fig. 3.54) creşte intensitatea câmpului electric E_0. Aceasta produce o creştere a intensităţii curentului şi deci a inducţiei magnetice în imediata vecinătate a conductorului (a). Câmpul magnetic crescător generează un câmp electric (b) variabil care îi înconjură liniile (evident, câmpul electric este mai îndepărtat de conductor). La rândul său, câmpul electric variabil se înconjură (c) cu un nou câmp magnetic variabil (şi mai îndepărtat), care generează un nou câmp electric (d) etc. Se creează astfel un adevărat „lanţ" spaţio-temporal, *care se propagă*, transmiţând informaţia despre creşterea intensităţii. Evident, oricare verigă – electrică sau magnetică – a acestui lanţ poate fi considerată ca iniţială.

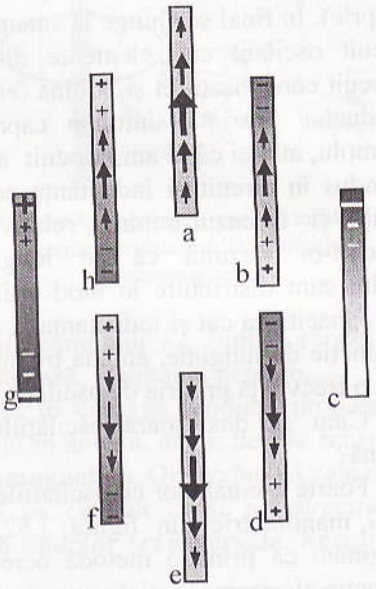


Fig. 3.55. Desfăşurarea oscilaţiei libere în antenă

În cazul unui circuit oscilant deschis, din cauza câmpurilor dispersate va apare câmpul electromagnetic. Acesta va prelua în permanenţă energie de la circuit şi o va transfera mediului înconjurător prin intermediul undei electromagnetice. Astfel, oscilaţiile libere în circuitul deschis vor fi amortizate, chiar dacă acesta nu are rezistenţă.

3.3.1 Undele electromagnetice

Heinrich Rudolf Hertz
1857-1894
Deşi promitea un viitor strălucit în domeniul umanist, Hertz şi-a îndreptat paşii spre matematică şi fizică, dovedindu-se un experimentator strălucit. Pe lângă demonstrarea experimentală a existenţei undelor electromagnetice, a mai descoperit şi efectul fotoelectric extern.

După cum am menţionat mai sus, oscilaţiile electromagnetice dintr-un circuit deschis se propagă în spaţiu sub formă de unde electromagnetice. Producerea acestor unde se realizează cu eficienţă maximă în cazul în care circuitul se rezumă la un simplu fir conductor, numit antenă. În figura 3.53 au fost prezentate câteva etape ale deschiderii circuitului oscilant. Plăcile condensatorului pot fi înlocuite însă cu două fire conductoare cu o lungime convenabilă (pentru păstrarea capacităţii). La rândul său bobina poate fi întinsă până se va rezuma şi ea la un fir (un fir conductor are şi el o inductanţă proprie). În final se ajunge la antenă, care este un circuit oscilant cu „elemente distribuite": am înlocuit condensatorul şi bobina (elemente concentrate) cu fire conductoare. Un fir conductor prezintă simultan capacitate şi inductanţă proprie, astfel că, spre exemplu, atunci când am înlocuit armăturile condensatorului cu cele două fire, am introdus în circuit şi inductanţa corespunzătoare acestora. Acelaşi lucru rămâne valabil şi în cazul bobinei, relativ la capacitatea proprie introdusă de firul ce a înlocuit-o. Rezultă că pe lungimea firului sunt distribuite în mod uniform atât capacitatea cât şi inductanţa şi deci, în funcţie de lungime, antena trebuie să aibă o frecvenţă proprie de oscilaţie.

Cum se desfăşoară oscilaţiile în antenă?

Foarte asemănator cu oscilaţiile din tubul manometric din figura 3.52, ne imaginăm că printr-o metodă oarecare (inducţie electromagnetică) punem electronii din antenă în mişcare ordonată, în sus, (fig. 2.55, a). (Tensiunea în acest moment este 0.) Electronii încep să se acumuleze la capătul superior al firului, în timp ce capătul opus devine pozitiv (b). Apare o tensiune, crescătoare în timp, care încetineşte treptat mişcarea electronilor. În momentul opririi (c) tensiunea dintre capetele conductorului devine maximă. Câmpul electric sileşte electronii să pornească în jos cu o viteză

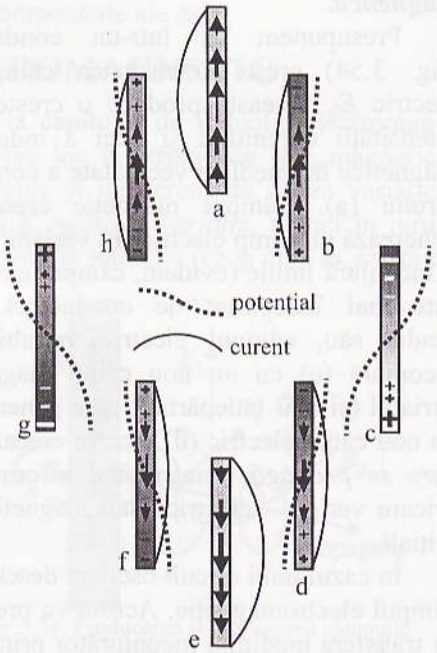


Fig. 3.56. Distribuţia curentului şi a potenţialului în antenă

din ce în ce mai mare (d). În momentul în care intensitatea atinge valoarea maximă (e), tensiunea devine 0, o situație analogă celei inițiale. Mai departe procesul urmează aceleași faze, dar în sens opus (f, g, h).

Dacă analizăm distribuția de-a lungul firului și comportarea în timp a intensității și a potențialului, obținem un tablou ca cel din figura 3.56. Aceste distribuții nu reprezintă altceva decât o undă staționară în antenă, absolut asemănătoare cu unda staționară dintr-o coardă sau o vargă (v. cap.I). Conform analogiei dintre fenomenele mecanice și cele electrice, intensitatea este și aici corespondentul vitezei (ventrul se află în mijlocul firului), iar forței îi corespunde potențialul (cu ventre la capete).

Oscilațiile din antenă produc în mediul înconjurător unde electromagnetice. Procesul de propagare este ilustrat în figura 3.57, în care s-a luat ca fază a oscilației momentul b din figura 3.56. (Pentru a ușura înțelegerea fenomenelor, ne vom rezuma doar la câte o linie de câmp.)

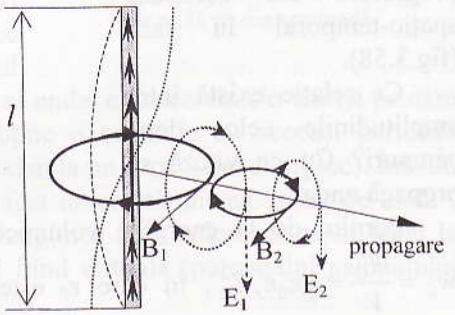


Fig. 3.57. Propagarea unei perturbații electrice prin intermediul câmpului electromagnetic

Inducția câmpului magnetic (B_1) produs de antenă este în scădere și generează un câmp electric (E_1). Linia câmpului electric (închisă) înconjoară linia câmpului magnetic. În continuare, câmpul E_1, variabil și el, dă naștere câmpului magnetic B_2. Liniile lui B_2, ce înconjoară liniile câmpului E_1, sunt la rândul lor înconjurate de liniile câmpului E_2, pe care îl generează, și așa mai departe.

Procesele descrise mai sus descriu modul în care se produce propagarea informației despre scăderea intensității curentului în antenă, dar și despre sensul în care circulă acesta. Aceasta este **o undă electromagnetică**. Observăm că cele două câmpuri sunt *perpendiculare* nu numai unul pe celălalt ci și *pe direcția de propagare*. O asemenea orientare este specifică **undelor transversale**. Rezultă că unda electromagnetică este o undă transversală.

3.3.2 Ecuația undei. Viteza undelor electromagnetice

Presupunem că în antenă au loc oscilații armonice ale electronilor. Unda electromagnetică generată va fi și ea armonică. Considerând că ne aflăm suficient de departe de antenă, amplitudinea undei va fi independentă de distanță, iar unda va putea fi considerată plană. În capitolul I a fost dedusă ecuația unei unde progresive plane. Această ecuație rămâne valabilă și în cazul undei electromagnetice, pentru cele două componente: magnetică – $B(t,x) = B_m \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ și electrică $E(t,x) = E_m \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$.

În aceste ecuații B_m și E_m sunt amplitudinile celor două câmpuri, iar λ este lungimea de undă $\lambda = vT = v / \nu$, cu v – viteza de propagare a undei.

Spre deosebire de unda staționară, în care B și E sunt defazate cu $\pi/2$ (și în spațiu și în timp), la unda progresivă ele oscilează spațio-temporal în fază (fig.3.58).

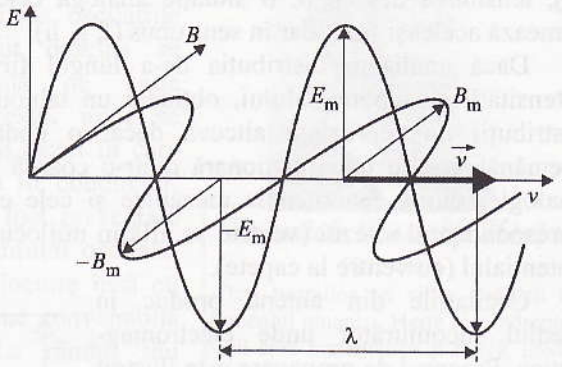


Fig. 3.58. Vectorii E și B ai undei plane la un moment dat

Ce relație există între amplitudinile celor două câmpuri? Cu ce viteză se propagă unda?

Pornim de la energiile volumice ale câmpurilor. Pentru câmpul electric: $w_E = \frac{W_E}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E_m^2$, în care ε_0 este permitivitatea absolută a vidului, iar ε_r permitivitatea relativă a mediului. Pentru componenta magnetică vom avea: $w_B = \frac{W_B}{V} = \frac{1}{2}\frac{B_m^2}{\mu_0\mu_r}$, în care μ_0 și μ_r sunt, respectiv, permeabilitatea magnetică absolută a vidului și permeabilitatea relativă a mediului.

Aceste două densități de energie trebuie să fie egale în virtutea generării reciproce a câmpurilor. Rezultă:

$$E_m = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_r\mu_r}} B_m = vB_m . \qquad (3.55)$$

Fracția v nu reprezintă un simplu coeficient de proporționalitate. Atât ca dimensiuni, cât și ca semnificație fizică, v este o viteză – viteza de propagare a undelor electromagnetice în mediul dat. În (3.55) putem separa doi factori:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = c \cdot \frac{1}{n} . \qquad (3.56)$$

Primul factor este o constantă universală:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \qquad (3.57)$$

reprezintă **viteza de propagare a undelor electromagnetice (luminii) în vid.** Al doilea factor,

$$n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} , \qquad (3.58)$$

se numeşte **indicele de refracţie absolut al mediului** şi reprezintă o constantă de mediu. De fapt, după cum se va vedea mai târziu, n este dependent de frecvenţă.

Vârfurile vectorilor E şi B din unda electromagnetică plană, descrisă de ecuaţiile de mai sus se aşază pe nişte curbe reprezentate, pentru un moment dat, în figura 3.58.

Comparând lungimea l a antenei din figura 3.57 cu lungimea de undă (fig. 3.58) constatăm că $\lambda = 2l$. O astfel de antenă se numeşte antenă semiundă (dipol). Tabloul undei staţionare din antenă semănă şi cu cel al undei elastice dintr-o undiţă pe care o scuturăm, ţinând-o de mijloc. Putem obţine o oscilaţie cu aceeaşi perioadă folosind doar jumătate de undiţă, pe care o fixăm la un capăt (fostul mijloc). Într-un mod asemănător s-a raţionat atunci când a fost inventată antena „sfert de undă", figura 3.59. Această antenă este un fir cu lungimea $\lambda/4$, având un capăt legat la pământ, cea de-a doua jumătate a dipolului fiind virtuală (potenţialul pământului este considerat 0).

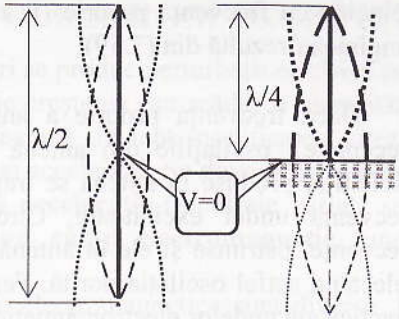


Fig. 3.59. Echivalenţa antenei sfert de undă cu cea semiundă

3.3.3 Producerea undelor radio. Frecvenţa proprie a antenei

După cum s-a menţionat mai sus, oscilaţiile din circuitul deschis se amortizează datorită radiaţiei de energie electromagnetică sub formă de unde electromagnetice (se mai numesc **unde radio**). Pentru a produce în permanenţă unde, este necesară menţinerea amplitudinii de oscilaţie în antenă. Acest lucru se realizează prin transfer de energie de la un generator de oscilaţii întreţinute. Cuplarea antenei la generator se poate realiza inductiv, ca în figura 3.60. Pentru a se asigura o radiaţie eficientă este necesar ca frecvenţa proprie a antenei să fie egală cu frecvenţa generatorului. În acest mod antena va fi în rezonanţă cu generatorul şi amplitudinea oscilaţiilor (în antenă şi în undă) va fi maximă. Lungimea necesară pentru o antenă semiundă va fi:

$$l = \lambda/2 = cT/2 = c/2\upsilon. \qquad (3.59)$$

După cum ştim, o serie de fenomene sunt reversibile. Reversibile sunt şi fenomenele legate de antenă. Dacă un conductor aflat într-un câmp electromagnetic, este aşezat paralel cu vectorul E, atunci electronii săi vor fi antrenaţi într-o mişcare oscilatorie. În conductor (antenă) apar astfel oscilaţii electromagnetice forţate, cu o perioadă egală cu a undei. Aşa cum am văzut mai sus, amplitudinea oscilaţiilor forţate este maximă atunci când frecvenţa curentului

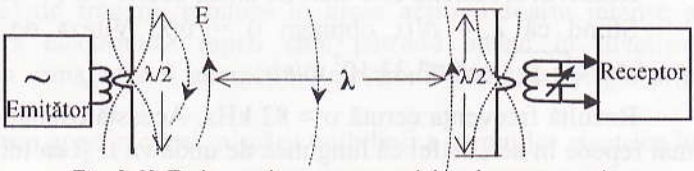


Fig. 3.60. Emiterea şi receptarea undelor electromagnetice

coincide cu frecvența proprie (la rezonanță). Frecvența proprie a unei antene cu lungimea l rezultă din (3.59):

$$\upsilon_0 = c/2l\,. \qquad (3.60)$$

Dacă frecvența proprie a antenei coincide cu frecvența undei inductoare (receptate), oscilațiile din antenă vor avea amplitudine maximă. Mai departe, oscilațiile produse în antenă se transmit inductiv unui circuit oscilant, acordat pe frecvența undei excitatoare. Circuitul rezonant atenuează oscilațiile cu alte frecvențe, pătrunse și ele în antenă (v. comentariul de la **problema rezolvată 2**), selectând astfel oscilația dorită. Fenomenele descrise stau la baza multor aplicații practice ale undelor electromagnetice (comunicațiile radio).

Dacă în radiocomunicații s-ar utiliza o simplă undă sinusoidală aceasta n-ar putea oferi nicio informație, cu excepția faptului că există (la fel ca o coală albă). Din acest motiv este necesar ca informația să fie introdusă în undă („înscrisă"). Înglobarea informației în undă se numește modulare. Modularea semnalelor radio se poate realiza în mai multe moduri. Cea mai simplă este modularea în amplitudine. La emițător, cu ajutorul unor dispozitive speciale (modulatoare), se modifică amplitudinea E_m (implicit B_m) a undei purtătoare în funcție de informația ce trebuie transmisă. În receptor, prin procesul de demodulare, se extrage informația, care se utilizează mai departe. În figura 3.61 este prezentat aspectul unei unde modulate în amplitudine.

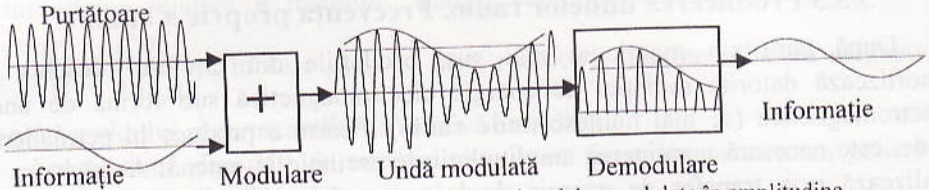


Fig. 3.61. Transmiterea informației cu ajutorul undelor modulate în amplitudine

Problemă rezolvată (9)

O antenă legată la pământ are lungimea l = 100 m și urmează să fie folosită pentru comunicații submarine (în apă). Calculați frecvența undei purtătoare și lungimea de undă în aer. Inductanța circuitului oscilant fiind L = 1mH, aflați capacitatea condensatorului. Pentru apă $\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 81$.

Rezolvare. Antena este sfert de undă, deci $\lambda = 4 \cdot l = 400$ m în apă.

Știind că $\lambda = v/\upsilon$, obținem $\upsilon = v/\lambda$. Viteza de propagare în apă este $v = c/n = c/\sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = c/9 \approx 3{,}33 \cdot 10^7$ m/s.

Rezultă frecvența cerută $\upsilon \approx 83$ kHz. Această oscilație se va propaga de 9 ori mai repede în aer, astfel că lungimea de undă va fi și ea tot de 9 ori mai mare decât în apă $\lambda_0 = n\lambda = 3600$ m.

Pentru calcularea capacității condensatorului folosim formula lui Thomson: $T = 2\pi\sqrt{LC} = \frac{1}{\upsilon}$. Obținem: $C = \frac{1}{4\pi^2 \upsilon^2 L} \approx 36 \cdot 10^{-10}\text{F} = 3{,}6\text{nF}$.

3.4. CLASIFICAREA UNDELOR ELECTROMAGNETICE

Undele electromagnetice apar ori de câte ori se produc perturbații electrice sau magnetice. Mai sus am considerat ca perturbație creșterea sau scăderea intensității curentului electric într-un circuit. Aceasta înseamnă de fapt modificarea vitezei electronilor (purtătorilor de sarcină), apariția unei accelerații. Se dovedește că **orice mișcare a unei sarcini electrice care implică accelerație** (rectilinie variată sau curbilinie uniformă sau variată) **generează un câmp electromagnetic** (unde electromagnetice).

Criteriile după care se pot clasifica undele electromagnetice sunt diverse. În continuare vom enumera câteva.

a) În funcție de cauza apariției undelor, distingem patru clase de unde:

– undele radio (hertziene), care apar datorită mișcării oscilatorii a electronilor în circuite electrice;

λ (m)	Denumire	Domeniu	Categorie	
10^{3}	kilometrice	unde lungi	Unde radio	
10^{2}	hectometrice	unde medii		
10	decametrice	unde scurte		
1	metrice	unde ultrascurte		
10^{-1}	decimetrice	unde ultraînalte		
10^{-2}	centimetrice			Sincrotron
10^{-3}	milimetrice			
$10^{-4} - 8 \cdot 10^{-7}$	submilimetrice (calorice)	infraroșu	Unde termice	
$8 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-7}$	lumină	vizibil		
$4 \cdot 10^{-7} - 10^{-9}$	chimice	ultraviolet		
sub 10^{-9}	X, γ		Radiații de frânare	

– radiațiile (undele) termice apar în urma ciocnirilor dintre atomi (sau/și ioni) datorate agitației termice, în urma cărora electronii își schimbă starea energetică în atom (ion);

– radiațiile (undele) de frânare, produse în urma acțiunii foarte intense a nucleului atomic asupra electronilor rapizi care pătrund adânc în învelișul electronic al atomilor. În urma acestei interacțiuni electronii cedează energie prin radiație și sunt frânați;

– radiațiile sincrotron apar în cazul mișcării curbilinii a sarcinilor electrice în câmpuri magnetice.

b) După lungimea lor de undă (frecvență). Începem cu undele radio (folosite în telecomunicațiile radio) cu λ cuprins între 10 km și 0,1 mm.

Începând cu 10^{-4} m și până la $8 \cdot 10^{-7}$m avem un spectru de unde numite „calorice" sau infraroșii. Urmează lumina vizibilă și razele ultraviolete. Aceste

unde au drept origine mişcarea de agitaţie termică în solide şi lichide incandescente precum şi în plasmă. (Plasma reprezintă o stare a materiei alcătuită din atomi, ioni cu diferite grade de ionizare – inclusiv nuclee atomice – şi electroni).

Dincolo de ultraviolet se află razele X şi γ (de frânare, şi de origine nucleară).

Radiaţiile sincrotron ocupă o plajă care începe în zona scurtă a undelor radio (10^{-2}m) şi se întinde în zona razelor X.

Este evident că o delimitare strictă a plajelor nu este posibilă, diversele domenii şi categorii întrepătrunzându-se din diverse motive.

c) O altă clasificare a undelor electromagnetice se poate baza pe natura sursei acestora: naturale şi artificiale.

Undele produse de surse naturale sunt cele mai numeroase, atât ca lungimi de undă cât şi ca proveniență: ne scăldăm într-un ocean de unde electromagnetice. În primul rând este vorba de lumină, indiferent de sursă – cosmică sau terestră. Din cosmos suntem bombardaţi cu unde electromagnetice: lumină, raze infraroşii şi ultraviolete provenite de la Soare, dar şi de la ceilalţi aştri. Din spaţiul cosmic vin unde electromagnetice cu frecvenţe foarte mari – raze X şi γ, dar şi unde din categoria radio. Sursele sunt diverse: atomi, ioni, nuclee atomice etc.

Undele artificiale pot fi clasificate după modul de producere: unde generate cu ajutorul circuitelor electronice – de la „0" până la aproximativ 10^{12} Hz (λ>0,1 mm) şi unde produse cu generatoare cuantice – de la 10^{10} Hz până spre 10^{15} Hz (1cm>λ>0,4μm).

Generatoarele bazate pe circuite electronice pot fi la rândul lor: generatoare cu circuit oscilant – până pe la 10^{9} Hz (decimetrice), sau cu dispozitive speciale (magnetronul care produce radiaţie de tip sincrotron) pentru frecvenţe ce depăşesc 10^{9} Hz până spre 10^{12} Hz.

d) De asemenea, undele electromagnetice mai pot fi împărţite în coerente şi necoerente. Cele coerente sunt produse de surse artificiale şi îşi păstrează caracteristicile (frecvenţă, amplitudine, fază) constante în timp (eventual se modifică în mod controlat).

3.4.1. Proprietăţile undelor electromagnetice

Proprietăţile undelor electromagnetie pot fi împărţite în două categorii.

Prima este legată de caracterul lor ondulatoriu şi reprezintă proprietăţi (fenomene) general valabile pentru unde: ele suferă fenomene de **reflexie, refracţie, interferenţă, difracţie, difuzie, absorbţie, polarizare.**

A doua categorie derivă din modul electromagnetic de interacţiune cu substanţa: **undele electromagnetice acţionează direct asupra electronilor.**

Ele pot produce ionizarea substanţei – efect fotoelectric extern (pentru $\lambda<7\cdot10^{-7}$m) sau modificarea conductivităţii electrice a semiconductoarelor – efect fotoelectric intern – (pentru $\lambda<10^{-5}$m). Fiind purtătoare de energie, undele electromagnetice produc încălzirea obiectelor aşezate în calea lor (electronii periferici sau de conducţie primesc energie electromagnetică şi o redistribuie apoi tuturor atomilor) . În funcţie de lungimea de undă, ele pot traversa, sau nu, o serie

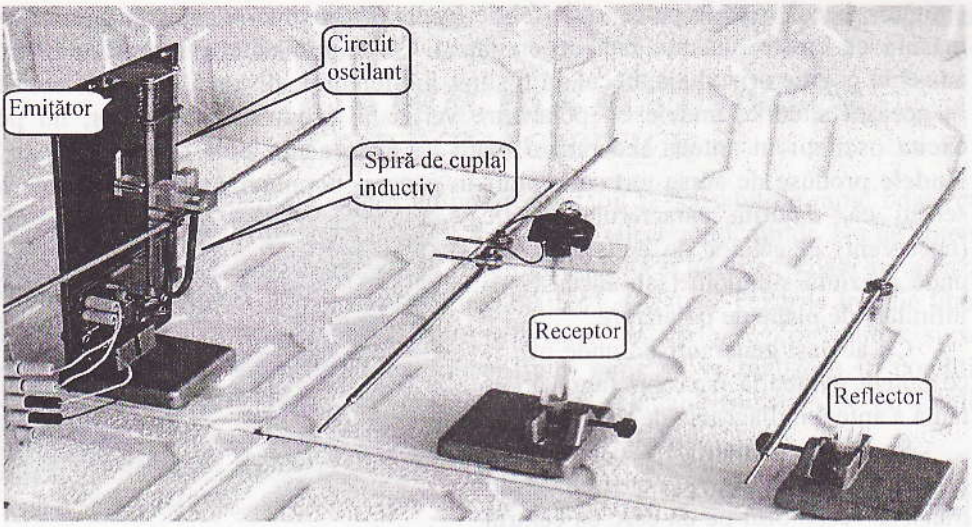


Fig. 3.62. Dispozitiv pentru emisia şi recepţia undelor electromagnetice. Se pot evidenţia: modularea, reflexia, polarizarea şi interferenţa undelor electromagnetice, precum şi formarea undelor staţionare.

de corpuri (sisteme fizice): apă, ziduri, ceaţă, nori etc. Undele electromagnetice cu o lungime de undă oarecare pot provoca emisia unor alte unde electromagnetice cu lungime de undă mai mare – prin fenomenul de fluorescenţă. De exemplu, unele substanţe absorbind raze ultraviolete pot genera lumină (aplicaţie: lămpile fluorescente), altele sunt fluorescente pentru raze X (aplicaţie radioscopia).

Ne vom referi şi la o proprietate ondulatorie, importantă din punct de vedere practic, care nu se întâlneşte însă la sunet: **polarizarea**.

În **unda transversală** produsă de antenă (fig. 3.57, 3.58), vectorul E (componenta electrică este importantă în practică) determină împreună cu direcţia de propagare un anumit plan, numit plan de polarizare. În figurile menţionate spunem că undele sunt polarizate vertical, planul vectorului E fiind vertical. Cu generatorul de unde metrice (fig. 3.62) şi cu un receptor (antenă $\lambda/2$ cu un bec intercalat în mijloc) se poate evidenţia polarizarea acestor unde.

Dacă antena emiţătoare este aşezată vertical (polarizare verticală), recepţia se va produce cu amplitudine maximă (becul are strălucire maximă) atunci când antena receptoare va fi verticală şi va avea o lungime corespunzătoare lungimii de undă a emiţătorului (pentru emisie şi recepţie optime antenele trebuie fie acordate pe aceeaşi frecvenţă).

Deplasând receptorul, cu antena orientată vertical, pe un cerc cu centrul în emițător, becul va arde peste tot la fel de intens (strălucirea se micşorează însă pe măsură ce creşte distanța față de emițător). Dacă însă antena receptorului este adusă în poziție orizontală, becul va fi stins, indiferent de distanță sau de orientare. În această situație, undele cu polarizare verticală, produse de emițător, nu pot excita oscilații în antena receptoare (care va avea acum polarizare orizontală). **Undele** produse de surse **naturale sunt** în general **nepolarizate**. Nepolarizate în sensul că, datorită caracterului haotic (necoerent) al actelor de emisie, aceste unde prezintă simultan (sau succesiv) o infinitate de plane de polarizare.

Cu acelaşi generator de unde metrice putem evidenția o proprietate importantă a antenei: diagrama de radiație.

Se aşază antenele paralel, în poziție orizontală figura 3.63, a-c. Dacă vom translata receptorul pe un cerc cu centrul în emițător, vom constata că becul arde în mod diferit, în funcție de unghiul azimutal α. În poziția a (α = 0) strălucirea este maximă, în c (α = 90°) – lipseşte, iar în celelalte – b – este intermediară. În concluzie: 1. radiația este maximă în planul mediator al antenei; 2. o antenă (un dipol radiant) nu radiază în lungul său. Este valabilă şi reciproca: antena nu recepționează o undă care se propagă în lungul său (fig. 3.63, f).

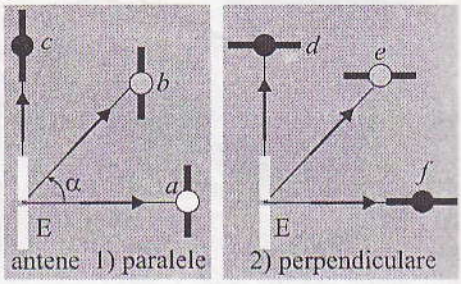


Fig. 3.63. Amplitudinea semnalului emis depinde de direcția (α) de emisie (a,b,c) şi de orientarea relativă a antenelor (d,e,f) (polarizarea este orizontală)

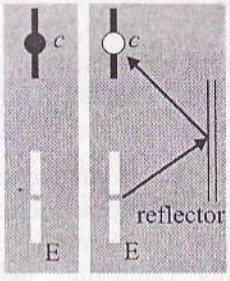


Fig. 3.64. Reflexia undelor electromagnetice

Dacă antenele sunt coliniare (fig. 3.63, c), becul nu arde. Putem demonstra acum reflexia undelor electromagnetice. Pentru aceasta, aşezăm paralel cu antenele o bară conductoare suficient de lungă (λ/2 sau mult mai mare) sau o foaie de tablă, cum se vede în figura 3.64. Receptorul va primi undele reflectate şi becul se va aprinde. Se mai pot face şi alte experimente. Aşezăm pe aceeaşi dreaptă emițătorul, receptorul şi reflectorul ca în figura 3.65, b,c. Apropiind sau depărtând reflectorul de receptor, becul poate să ardă mai intens decât în absența reflectorului (b), sau să se stingă. Acesta este un exemplu tipic de interferența undelor. În figura 3.64, b, antena este excitată de două unde care oscilează în fază şi se amplifică reciproc: una directă – de la emițătorul E, a doua – reflectată de O. În fig. c, unda reflectată este în opoziție de fază cu cea

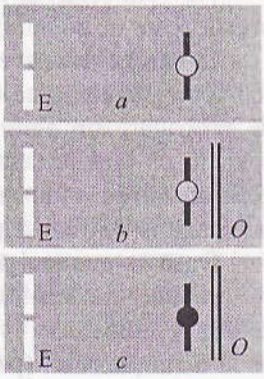


Fig. 3.65. De ce se stinge becul?

directă astfel că rezultanta va fi 0. Distanța dintre cele două poziții ale reflectorului O trebuie să reprezinte un număr impar de $\lambda/4$ pentru a se obține inversarea fazei undei reflectate față de cea directă.

3.5. APLICAȚII PRACTICE ALE UNDELOR ELECTROMAGNETICE

Civilizația modernă a suferit un progres notabil și deosebit de rapid odată cu introducerea undelor electromagnetice în circuitul telecomunicațiilor. Nu ne putem imagina viața modernă fără radio, TV, telefonie mobilă și internet. Toate au la bază idei similare cu cele ilustrate în figurile 3.60, 3.61. (În toate cazurile trebuie ținut cont de faptul că undele emise sunt polarizate: antenele se construiesc și se orientează în așa fel încât recepția semnalului emis să se realizeze în condiții optime. Dacă ați remarcat, în informația despre semnalul transmis de un satelit geostaționar este inclusă și polarizarea: orizontală, verticală.)

Dacă scriem complet ecuația (*E*): $E(t,x) = E_m \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$,

constatăm că informația poate fi „înscrisă" în undă nu numai cu ajutorul amplitudinii: se mai pot modula frecvența ($\upsilon = 1/T$), sau faza inițială φ. Dacă receptorul este sensibil la faza undei receptate, este posibilă și extragerea unor informații utile despre schimbarea poziției x (a emițătorului sau a receptorului).

Pornind de la fenomenul de reflexie au fost construite instalații menite să detecteze și să localizeze obiecte, să determine viteza de deplasare a acestora cu ajutorul undelor radio. Este vorba de radar. În funcție de destinația acestora, instalațiile radar lucrează cu unde din domeniul metric până la cele din domeniul submilimetric. În radar se emit, în mod periodic, impulsuri (trenuri) de unde cu o durată determinată (foarte scurtă). Antena, prevăzută cu un reflector paraboloidal, formează un fascicul îngust și foarte puternic de unde ce se propagă rectiliniu, după o direcție cunoscută. Undele reflectate de un obiect sunt recepționate de către aceeași antenă ca un ecou, după un interval de timp $\tau = 2d/c$. Aici d = distanța până la obiect, c = viteza luminii în aer (vid). (Recepționarea ecourilor se produce evident în pauza dintre impulsuri). Urmează apoi prelucrarea semnalului ecou într-o unitate specializată de calcul și afișarea rezultatelor pe un monitor. Prelucrarea și afișarea rezultatelor diferă în raport cu destinația instalației (meteo, de dirijare, monitorizarea traficului aerian, maritim etc).

Frecvența semnalului ecou poate să difere de a undei primare. Dacă „ținta" se apropie — frecvența ecoului este mai mare, dacă se îndepărtează – mai mică (fenomenul se numește efect Doppler). Diferența de frecvență depinde direct proporțional de viteza țintei. În felul acesta se obțin informații complete despre obiectul detectat: poziție (direcție și distanță), viteză instantanee (Doppler) și dimensiuni orientative (puterea ecoului).

Pe baza antenelor paraboloidale și a dispozitivelor de recepție ultrasensibile din tehnica radar, au fost construite radiotelescoapele cu ajutorul cărora se

investighează spectrul radio de proveniență extraterestră, fiind descoperite radiogalaxii, pulsari etc.

Tot din domeniul radar, a decurs o aplicație foarte „terestră" a microundelor: cuptorul cu microunde. Câmpul electromagnetic de înaltă frecvență forțează dipolii electrici din substanță să se reorienteze pe parcursul unei perioade. În urma acestei acțiuni se degajă căldură în masa materialelor dielectrice (izolatoare). (Imaginati-vă un stadion plin de spectatori cărora li se ordonă periodic și foarte des întoarceri.) Undele pot trece prin dielectrici și, pentru anumite frecvențe, degajarea de căldură în aceștia poate fi deosebit de puternică. În medii conductoare undele nu pot pătrunde, dar încălzirea se poate produce prin efectul pelicular.

Cuptorul cu microunde conține un generator de oscilații cu o frecvență de $2{,}4 \cdot 10^{12}$ Hz (2,4 GHz) și o putere de aproximativ 700 W. Undele sunt dirijate spre incinta cuptorului și apoi împrăștiate cu un difuzor asupra obiectului ce urmează a fi încălzit. Spre deosebire de cuptorul termic, cuptorul cu microunde acționează (încălzește) doar conținutul său, nu și mediul înconjurător (bucătăria). Energia radiantă absorbită este proporțională cu masa corpului din cuptor (la funcționarea în gol puterea consumată de la rețea este minimă spre deosebire de cel termic, care consumă mereu aceeași putere).

Alte aplicații practice ale undelor electromagnetice, bazate pe modul de interacțiune al acestora cu materia sunt:

– televiziunea: transformarea imaginii optice în semnal electric – imagine electronică – (prin efect fotoelectric extern sau intern); transmiterea semnalului spre receptor (prin unde radio); transformarea semnalului electric în imagine optică (emisie de lumină)

– fotografia (reacții fotochimice)

– radiografia (tomografie, defectoscopie X): producerea razelor X (de frânare), absorbția undelor în substanță, citirea (înregistrarea) informației despre gradul de absorbție în substanță (fluorescență, reacții fotochimice, efect fotoelectric)

– aparatura de vedere nocturnă (în infraroșu): imaginea „termică" este transformată în imagine „electrică" (efect fotoelectric intern), imaginea electrică (poate fi mărită) este apoi convertită în imagine optică (emisie de lumină).

3.5.1. Câteva reguli de protecție

Ținând cont de proprietățile undelor electromagnetice, trebuie să avem în vedere că acestea pot avea efecte nocive asupra noastră și a celor din jur (mediului). Efectele pot fi împărțite în două grupe: de intensitate și de doză. Cele din urmă pot fi specifice (depind de λ).

Prima categorie este evidentă: indiferent de lungimea de undă, trebuie **evitată expunerea la radiații electromagnetice intense** (pot apare în cel mai simplu caz arsuri). În acest sens nu se recomandă să ne apropiem de surse puternice de câmp electromagnetic: stații radio, instalații radar etc.

A doua categorie este ceva mai aparte, întrucât afecțiunile pot avea caracter cumulativ: efectele produse de unde depind nu doar de puterea acestora (care poate

fi relativ slabă) ci şi de durata expunerii (energia radiantă absorbită de corp este W=P·t) . Este cazul radiaţiilor ionizante (ultraviolet, X, γ) care distrug ţesuturile vii şi pot acţiona la nivel subcelular (produc mutaţii).

Din acest punct de vedere trebuie evitată expunerea îndelungată la raze ultraviolete care produc afecţiuni superficiale (conjunctivită, cancer al tegumentelor), la raze X şi γ (care produc afecţiuni de acelaşi gen, dar pot afecta organe interne). Razele X şi γ au şi un efect genetic mult mai puternic. Sunt prevăzute o serie de recomandări şi norme legate de folosirea instalaţiilor care generează raze ultraviolete: în cazul sudurii electrice sunt obligatorii măştile protectoare. Pentru manipularea aparatelor care produc sau utilizează în diverse scopuri raze X sau γ (radioscopie, radiografie, tomografie, defectoscopie) este obligatorie folosirea şorţurilor şi a ecranelor de protecţie care au în compoziţia lor plumb. (Plumbul prezintă o absorbţie foarte puternică în această zonă a spectrului electromagnetic.). În ideea protejării personalului, a pacienţilor şi, în general, a mediului au fost concepute noi metode şi dispozitive de detecţie ce permit folosirea unor puteri şi doze de radiaţii puţin periculoase, sau evită iradierea (camere de luat vederi etc).

În final, pentru a încheia spirala evoluţiei, reamintim celor care au citit introducerea că, transportul la mari distanţe a energiei electrice a fost cel ce a impulsionat introducerea curentului alternativ la scară globală. Tocmai acest lucru face ca în prezent să se revină la folosirea curentului continuu în liniile magistrale de foarte înaltă tensiune. Puterile transportate foarte mari, tensiunile deosebit de înalte (10^6 V) şi lungimile acestor linii dau naştere la câmpuri electromagnetice intense care, printre altele, generează şi pierderi semnificative atunci când se utilizează curentul alternativ. (Poate aţi remarcat că, atunci când treceţi cu automobilul pe sub o linie de înaltă tensiune, aparatul de radio încetează să mai funcţioneze, sau funcţionează cu un puternic zgomot de fond. Acest fenomen apare din cauza câmpului electromagnetic generat de curentul alternativ. Acesta induce în antenă un semnal atât de puternic, încât partea electronică a receptorului se blochează.)

La ora actuală se extind sistemele magistrale de curent continuu: curentul industrial este convertit în curent continuu de înaltă tensiune, transportat şi apoi din nou transformat în curent alternativ industrial pentru distribuţie. Această modalitate de transport prezintă o serie de avantaje faţă de sistemul clasic: putere transportată mai mare la aceleaşi gabarite, radiaţie electromagnetică foarte slabă, cuplare foarte uşoară între reţelele naţionale.

Probleme propuse

1. Un circuit oscilant cu rezistenţa neglijabilă are capacitatea C=5μF şi inductanţa L=5mH. Condensatorul a fost încărcat la tensiunea U_m=100V şi cuplat la bobină.

1.1. Care este perioada proprie a circuitului? ($T = 10^{-3}$ s)

1.2. Ce amplitudine va avea tensiunea oscilațiilor electromagnetice? (U_m = = 100 V)

1.3. Care este energia oscilațiilor? (W = 25 mJ)

1.4. Ce valoare maximă are intensitatea curentului din circuit? (I_m = 0,31 A)

1.5. După cât timp de la cuplarea condensatorului energia magnetică va deveni egală cu cea electrică? ($t = T/8$ = 125 μs)

1.6. Ce rezistență critică are acest circuit? (R_c = 63 Ω)

1.7. Pentru ce rezistență a bobinei circuitul ar avea Q_f= 200? (R = 0,16 Ω)

2. Pentru comunicațiile radio sunt folosite antene dipol cu lungimea l =20 cm.

2.1. Ce lungime de undă se folosește? (λ = 0,4 m)

2.2. Ce frecvență au oscilațiile purtătoare? (υ = 750 Mhz)

2.3. Factorul de calitate al circuitului ce alimentează antena este Q_f=300. Ce capacitate are condensatorul, dacă rezistența bobinei este R=0,1Ω? (C = 7 pF)

2.4. Ce lungime ar trebui să aibe antena, dacă, la aceeași frecvență, ar funcționa în apă? (l' = l / 9)

2.5. Fiind introdusă în apă, pe ce frecvență este acordată antena? (υ' = υ/9)

2.6. Undele produse de emițător ajung la un receptor pe două drumuri cu lungimi diferite și interferă. Dacă diferența de drum este 1,4 m, aflați starea de interferență de la receptor (minim sau maxim). (minim)

3. O instalație radar emite impulsuri cu o durată $\tau=10^{-7}$s, care se repetă după $T=10^{-4}$s. Frecvența undei folosite este υ=20GHz, antena este folosită succesiv pentru emisie și recepție, iar impulsurile sunt identice.

3.1. Câte oscilații cuprinde un impuls? (N = 2000)

3.2. Ce lungime de undă folosește radarul? (λ = 1,5 cm)

3.3. Pe ce lungime se întinde un impuls? (l = 30 m)

3.4. Care este distanța dintre două impulsuri? (L = 30 km)

3.5. Ce rază maximă de acțiune poate avea instalația? (D = 15 km)

3.6. Până la ce distanță minimă poate fi utilizat acest radar? (d = 15 m)

Capitolul 4

OPTICA ONDULATORIE

INTRODUCERE

Optica studiază natura şi proprietăţile luminii precum şi interacţia acesteia cu substanţa. În funcţie de punctul de vedere asupra naturii luminii, folosit în studiul fenomenelor, optica se împarte în:

– **optica ondulatorie** ce studiază fenomenele în care se manifestă preponderent caracterul ondulatoriu al luminii: dispersia, interferenţa, difracţia, polarizarea;

– **optica fotonică** – studiază fenomenele în care se manifestă caracterul corpuscular al luminii: efectul fotoelectric, efectul Compton, emisia şi absorbţia radiaţiei;

– **optica geometrică** – foloseşte noţiunea de rază de lumină şi alte ipoteze simplificatoare fără a se referi la natura luminii.

Lumina provenită de la diferite corpuri constituie agentul fizic care, prin intermediul retinei, face ca ochiul să poată „vedea" aceste corpuri. Natura luminii, structura ei, a preocupat pe oameni din cele mai vechi timpuri.

În secolul al XIX-lea James Clerk Maxwell a pus bazele teoriei câmpului electromagnetic şi a arătat că perturbaţiile electromagnetice se propagă prin unde transversale. Coincidenţa dintre valoarea vitezei de propagare a luminii, determinată experimental de Fizeau, şi cea a vitezei undelor electromagnetice în vid, calculată de Maxwell conform formulei $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, l-a făcut pe acesta din urmă să emită ipoteza că lumina este de natură electromagnetică.

Experimente ulterioare au confirmat acest fapt şi au demonstrat că **efectele luminoase sunt produse de componenta electrică ($\vec{E}$) a câmpului electromagnetic.**

Astăzi ştim că undele luminoase fac parte din gama undelor electromagnetice, ocupând o porţiune relativ restrânsă din spectrul acestor unde, cuprinsă între lungimile de undă λ_V=380 nm (pentru lumina de culoare violet) şi λ_R=760 nm (pentru lumina de culoare roşie).

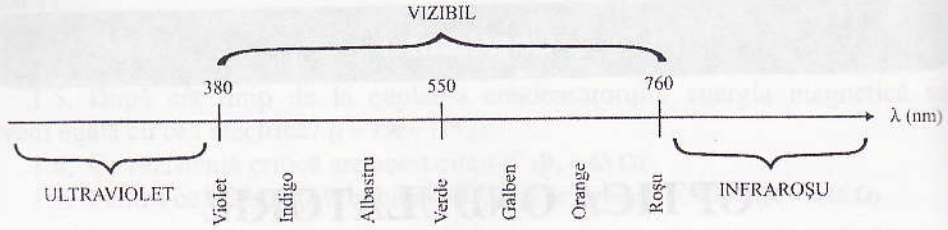


Fig. 4.1. Spectrul radiațiilor optice

După descoperirea radiațiilor **infraroșii** cu λ cuprins în intervalul (760 nm; 1200 nm) și a celor **ultraviolete** cu λ cuprins între (100 nm; 380 nm) și după ce s-a constatat că aceste radiații au proprietăți și produc fenomene asemănătoare cu cele luminoase, optica și-a extins domeniul ei de investigație și asupra acestor radiații.

Pentru a caracteriza radiația din domeniul **vizibil** se folosește termenul de **radiație luminoasă** sau lumină, iar pentru a caracteriza radiația din toate cele trei domenii se folosește termenul de **radiație optică.** În acest fel, noțiunea de radiație optică are un caracter mult mai general decât noțiunea de radiație luminoasă.

O sursă de radiație electromagnetică poate fi numită **sursă de lumină** numai dacă lungimea de undă a radiației emise este cuprinsă în domeniul (380 nm; 760 nm).

Fiecare culoare este caracterizată, din punct de vedere fizic, printr-un anumit domeniu de lungimi de undă sau frecvențe ($\upsilon = \frac{c}{\lambda}$):

Culoarea spectrală	Lungimea de undă ($x10^{-9}$ m)	**Frecvența ($x10^{14}$ Hz)**
Violet	380–430	7,9–7,0
Albastru	430–490	7,0–6,1
Verde	490–575	6,1–5,2
Galben	575–585	5,2–5,1
Portocaliu	585–650	5,1–4,6
Roșu	650–760	4,6–4,0

Dacă frecvența (sau lungimea de undă) are o valoare bine determinată, atunci unda respectivă se numește **radiație monocromatică.**

Lumina albă este o suprapunere de radiații monocromatice și, la o descompunere a sa după lungimile de undă cu ajutorul unei prisme, fenomen numit **dispersie,** se obține un spectru continuu de radiație care se prezintă ca o variație continuă a culorii de la roșu la violet ca un curcubeu.

4.1. DISPERSIA LUMINII

4.1.1. Dispersia luminii este fenomenul care rezultă din variația indicelui de refracție *n* al unui mediu în funcție de lungimea de undă.

Influența mediului asupra propagării luminii este determinată de interacția luminii cu atomii şi moleculele din care este alcătuit mediul. Această interacție duce la variația vitezei v a luminii şi, prin urmare, determină valoarea indicelui de refracție $n = \frac{c}{v}$.

Conform teoriei electromagnetice a luminii, indicele de refracție este dat de relația:

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \,. \qquad (4.1)$$

Pentru toți dielectricii transparenți, permeabilitatea magnetică μ_r este, practic, egală cu unitatea. Din această cauză avem:

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} \,.$$

Proprietățile dielectrice ale unui mediu sunt determinate de polarizarea lui, care apare în urma deplasării din poziția de echilibru a particulelor electrizate din interiorul atomilor sau moleculelor.

Mediile optice dielectrice nemagnetice se polarizează în prezența undelor de lumină datorită acțiunii vectorului optic $\vec{E}$ al undei, care antrenează electronii din mediu (electronii legați în cadrul atomilor sau moleculelor) într-o mişcare de oscilație.

Această polarizare determină o modificare a constantei dielectrice ε_r şi, deci, a indicelui de refracție n.

Pentru medii dispersive normale, indicele de refracție n depinde de lungimea de undă λ după relația lui Cauchy:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \ldots \qquad (4.1.2)$$

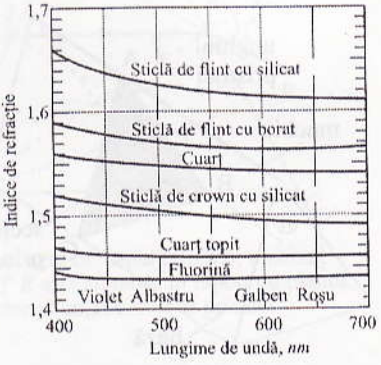
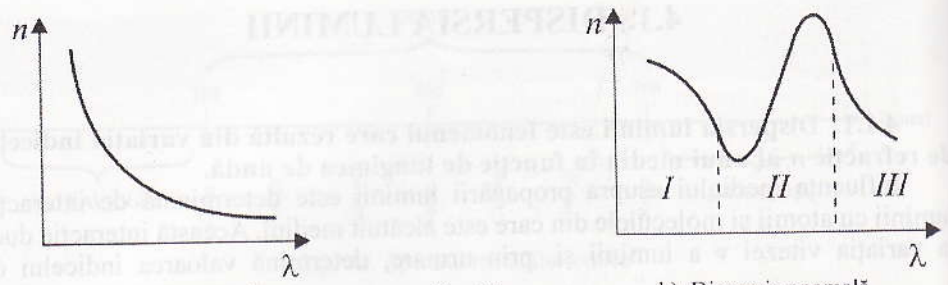


Fig. 4.2. Variația indicelui de refracție cu lungimea de undă pentru diferite materiale.

unde A, B, C sunt constante caracteristice fiecărui material.

Astfel, în cazul mediilor transparente în vizibil cum sunt: sticla, cuarțul, fluorina, avem o descreştere lentă a indicelui de refracție cu creşterea lungimii de undă după cum se vede în figura 4.2.

Prin urmare, un mediu optic cu dispersie normală este caracterizat printr-un indice de refracție a cărui valoare scade odată cu creşterea lungimii de undă (fig. 4.3, a).



a) Dispersie normală. *Fig. 4.3.* b) Dispersie anomală.

Ulterior s-a constatat că există şi substanţe (cum sunt soluţiile de iod, cianină, fuxină) pentru care curbele $n = f(\lambda)$ posedă maxime şi minime. Aceste cazuri de dispersii au fost numite „anomale" (fig. 4.3, *b*).

Un instrument foarte util în observarea fenomenului de dispersie a luminii prin sticlă este prisma optică.

4.1.2. Prisma optică. O prismă optică este un corp transparent mărginit de două feţe plane, neparalele; intersecţia lor constituie muchia prismei, iar unghiul diedru A format de aceste două feţe se numeşte unghiul prismei.

Orice secţiune a unei prisme printr-un plan perpendicular pe muchia ei se numeşte secţiune principală (fig. 4.4). Faţa opusă muchiei considerate se numeşte baza prismei.

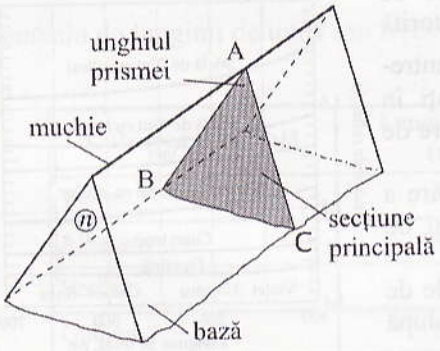


Fig. 4.4. Prisma optică.

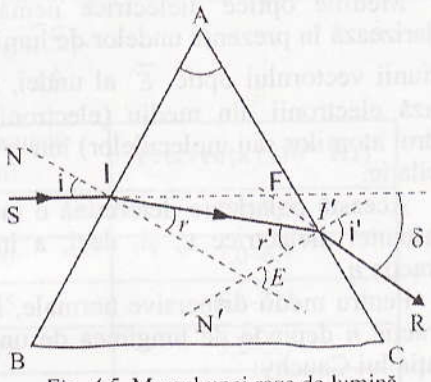


Fig. 4.5. Mersul unei raze de lumină într-o secţiune principală a unei prisme.

Schematic, o prismă optică se reprezintă printr-o secţiune principală (fig. 4,5).

Fie SI o rază de lumină monocromatică conţinută în planul unei secţiuni principale a unei prisme, n indicele de refracţie al substanţei din care este confecţionată prisma, i şi r unghiurile de incidenţă, respectiv refracţie pe prima faţă AB, r' şi i' unghiurile corespunzătoare de pe faţa a doua AC şi δ – unghiul de deviaţie dintre direcţia de incidenţă SI şi direcţia de emergenţă $I'R$.

La trecerea razei SI din aer în prismă ($n_{aer} = 1$), din legea refracţiei aplicată în I, rezultă:

$$\sin i = n \sin r. \tag{4.1.3}$$

De asemenea, în I':

$$n \cdot \sin r' = \sin i'. \tag{4.1.4}$$

Întrucât $\hat{E}$ este exterior în triunghiul $E\,I\,I'$, rezultă:

$$r + r' = E.$$

Dar $\hat{E} = \hat{A}$ (având același suplement, unghiul $\widehat{IEI'}$) și prin urmare:

$$r + r' = A. \tag{4.1.5}$$

Din $\Delta\, I\, I'\, F$ rezultă că suma unghiurilor $\widehat{FII'}$ și $\widehat{FI'I}$ este egală cu unghiul exterior δ; deoarece $\widehat{F\,I\,I'} = i - r$ și $\widehat{F\,I'\,I} = i' - r'$, se poate scrie:

$$\delta = (i - r) + (i' - r'), \text{ adică}$$

$$\delta = i + i' - (r + r'), \tag{4.1.6}$$

$$\text{sau } \delta = i + i' - A \tag{4.1.7}$$

Relațiile (4.1.3), (4.1.4), (4.1.5), (4.1.6) se numesc formulele prismei optice.

4.1.3. Deviația minimă. Din relația (6) se vede că unghiul de deviație variază cu unghiul de incidență. Se constată experimental că, atunci când unghiul de incidență variază în mod continuu, unghiul de deviație variază și el, luând totdeauna valori mai mari decât o anumită valoare minimă δ_{min}.

Această valoare minimă se realizează în cazul mersului simetric al razelor prin prismă, adică în cazul în care $i = i'$ și $r = r'$ și deci:

$$\delta_m = 2i - A. \tag{4.1.8}$$

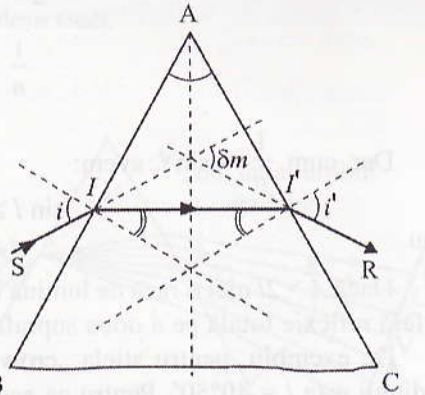


Fig. 4.6. În cazul deviației minime, traiectul luminos $S\,I\,I'\,R$ este simetric în raport cu planul bisector al unghiului A al prismei

Introducând $i = \dfrac{\delta_m + A}{2}$ și $r = \dfrac{A}{2}$ în legea refracției (3), rezultă:

$$n = \frac{\sin\dfrac{\delta_m + A}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}. \tag{4.1.9}$$

Măsurând unghiul de deviație minimă δ_m al unei prisme, se poate calcula cu ajutorul relației (9) indicele de refracție al materialului din care este confecționată prisma respectivă.

4.1.4. Condiția de emergență. Pentru ca o rază de lumină care pătrunde în prismă să poată ieși prin fața AC, trebuie să nu se producă reflexie totală pe fața AC, adică $r' \leq l$.

Din (5) rezultă $r' = A - r$, deci:

$$r \geq A - l.$$

Dacă $r < \frac{\pi}{2}$, putem scrie:

$$\sin r \geq \sin (A - l). \tag{4.1.10}$$

Din legea refracției în punctul I:

$$\frac{\sin i}{n} = \sin r$$

putem transcrie (10) astfel:

$$\frac{\sin i}{n} \geq \sin (A - l). \tag{4.1.11}$$

La incidență maximă, $i_{max} = \frac{\pi}{2}$ iar relația (11) devine:

$$\frac{1}{n} \geq \sin (A - l). \tag{4.1.12}$$

Dar, cum $\frac{1}{n} = \sin l$, avem:

$$\sin l \geq \sin (A - l),$$

sau

$$A \leq 2\, l. \tag{4.1.13}$$

Dacă $A > 2l$ nici o rază de lumină intrată în prismă nu mai iese din aceasta (toate suferă reflexie totală pe a doua suprafață a prismei).

De exemplu, pentru sticla „crown", unghiul limită pentru radiația galbenă a sodiului este $l = 40°50'$. Pentru ca această radiație să poată ieși din acest material, indiferent de unghiul de incidență, prisma optică trebuie să aibă $A \leq 81°40'$.

4.1.5. Prisma cu reflexie totală. O prismă cu reflexie totală este o prismă optică în care o rază de lumină suferă una sau mai multe reflexii totale, înainte de a ieși din prismă.

Cele mai simple prisme cu reflexie totală au ca secțiune principală un triunghi dreptunghic isoscel.

Dacă pe fața AB (fig. 4.7, a) cade normal o rază de lumină SI, ea nu este deviată ($i = 0 \Rightarrow r = 0$) și ajunge pe BC sub un unghi de 45° (superior unghiului limită, care la sticlă este de 42°) și se reflectă total după IR. Deci, fața BC a prismei se comportă ca o oglindă înclinată la 45° față de raza incidentă SI care, în acest caz, este deviată cu 90°. Asemenea prisme cu reflexie totală se folosesc la periscop.

Dacă raza SI_1 cade pe ipotenuza BC (fig. 4.7, b), cele două reflexii totale, în I_1 și I_2, întorc raza paralel cu ea însăși.

Prisma cu reflexie totală funcționează, în acest caz, ca un sistem de două oglinzi plane perpendiculare. Astfel de prisme se folosesc la binoclul cu prisme.

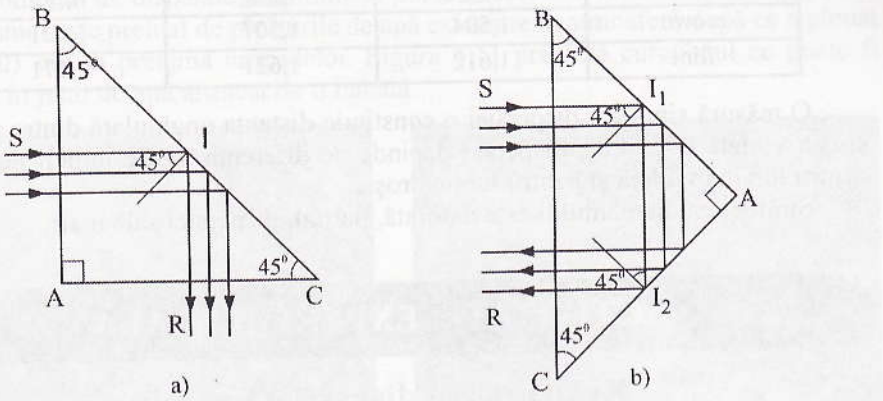


Fig. 4.7. Prisme cu reflexie totală.

4.1.6. Dispersia luminii prin prismă. Considerăm o rază de lumină albă, un amestec al tuturor lungimilor de undă vizibile, incidentă pe o prismă, ca în figura 4.8.

Deoarece deviația produsă de prismă crește cu creșterea indicelui de refracție, lumina violetă este deviată cel mai mult și cea roșie cel mai puțin. La ieșirea din prismă, fasciculul de lumină se desface în formă de evantai. Se spune că lumina a fost dispersată formând un spectru.

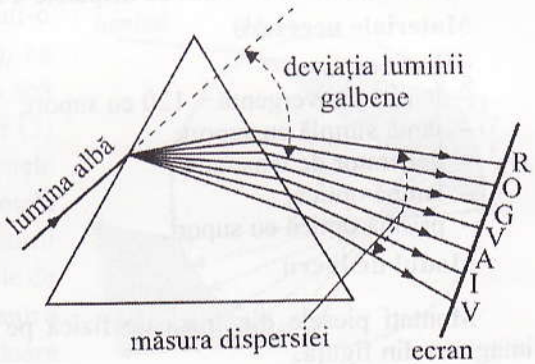


Fig. 4.8. Dispersia produsă de o prismă. Ansamblul culorilor de pe ecran se numește spectru.

Se pot distinge, exceptând nuanțele, 7 culori principale: roșu, portocaliu (orange), galben, verde, albastru, indigo și violet (culorile curcubeului), ale căror inițiale formează cuvântul ROGVAIV.

Aceste radiații se numesc radiații simple sau radiații monocromatice.

Observăm că, pentru același unghi de incidență a luminii albe, radiațiile simple ies din prismă sub unghiuri diferite, adică indicele de refracție al prismei este diferit pentru diferitele radiații monocromatice și anume, el crește de la radiația roșie până la radiația violet (vezi tabelul de mai jos).

Indicii de refracție absoluți a sticlei pentru unele radiații monocromatice

sticla	Indicii de refracție n		
	$n_{roșu}$	n_{galben}	n_{violet}
crown	1,504	1,507	1,521
flint	1,612	1,621	1,671

O măsură simplă a dispersiei o constituie distanța unghiulară dintre raza roșie și cea violetă (fig. 4.8); dispersia depinde de diferența dintre indicii de refracție pentru lumina violetă și pentru lumina roșie.

Strălucirea diamantului este datorată, parțial, dispersiei sale mari.

ACTIVITATE EXPERIMENTALĂ

Evidențierea dispersiei luminii

Tema lucrării

Observarea fenomenului de dispersie a luminii într-o prismă optică.

Materiale necesare

- banc optic;
- lentilă convergentă + 120 cu suport;
- fantă simplă cu suport;
- generator de tensiune;
- lampă optică;
- prismă optică cu suport.

Modul de lucru

Montați piesele din trusa de fizică pe bancul optic, în ordinea indicată în imaginea din figură.

Alimentați lampa optică la 6V și deplasați fanta dreptunghiulară paralel cu muchia prismei până când fasciculul luminos cade pe una din fețele prismei. Rotiți prisma pe suport până când fasciculul emerge prin cealaltă față, pentru a obține imaginea pe ecranul poziționat lateral: o fâșie colorată reprezentând spectrul luminii albe.

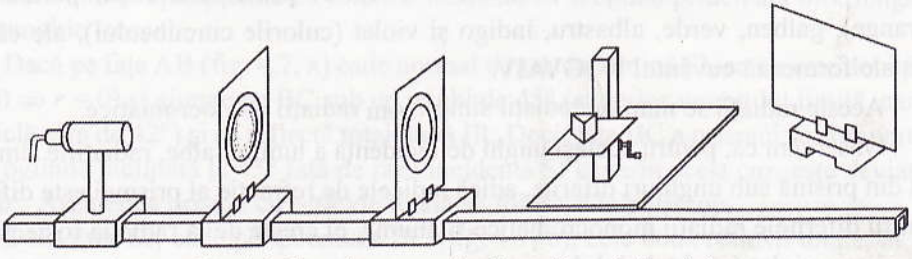


Fig. 4.9. Montaj pentru evidențierea dispersiei luminii

4.1.7. Aplicațiile dispersiei luminii în natură și în tehnică

1. Curcubeul

Fenomenul de dispersie a luminii se poate observa în cazul curcubeului, unde rolul prismei este preluat de picăturile de apă existente în atmosferă după ce a plouat (fig. 4.10) sau în preajma cascadelor. Figura 4.11 prezintă curcubeul ce poate fi observat în jetul de apă aruncat de o balenă.

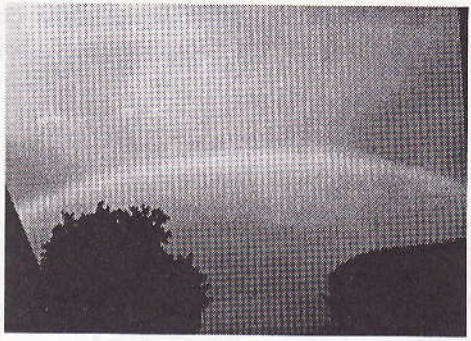


Fig. 4.10. Curcubeul

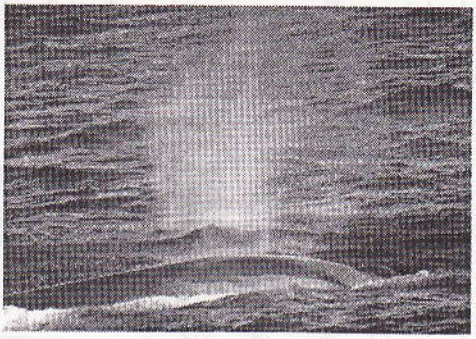


Fig. 4.11.

Când lumina soarelui pătrunde într-o picătură de apă (considerată sferică), ea suferă o refracție la trecerea din aer în apă (1) și încă una la ieșirea din apă în aer (3) (fig. 4.12). După refracția inițială, unele raze de lumină pot suferi reflexie totală internă pe suprafața posterioară a picăturii de apă (2). Datorită faptului că indicele de refracție al apei este diferit pentru diferitele lungimi de undă, fiecare culoare spectrală va fi refractată diferit și lumina albă este dispersată, descompusă în componentele ei.

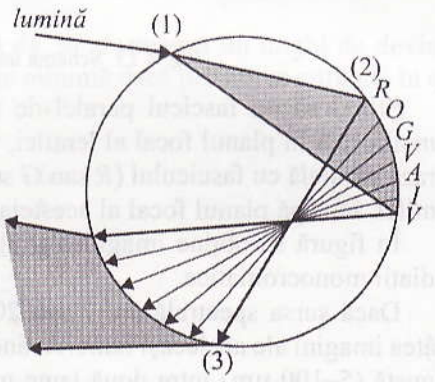


Fig. 4.12. Dispersia luminii într-o picătură de apă.

Roșul este refractat cel mai puțin, iar violetul cel mai mult.

În funcție de pozițiile (altitudinile) diferitelor picături, către un observator sunt trimise diferite culori. De aceea vom vedea culoarea roșie mai sus pe cer, iar culoarea violet la partea de jos a curcubeului.

Culorile curcubelului sunt cu atât mai vii și mai pure cu cât lumina se refractă și se reflectă pe picături mai mari de apă.

Curcubeul este vizibil atunci când soarele bate din spatele nostru în perdeaua de nori din față, lumina reflectându-se.

2. Aparate spectrale cu prismă

Dispersia stă la baza celui mai răspândit element optic care intră în componența aparatelor spectrale: prisma.

În cazul aparatului spectral, obiectul este fanta de intrare a luminii în aparat. Prisma împreună cu lentilele produc atâtea imagini ale fantei câte radiații monocromatice are sursa spectrală analizată.

În figură lentila L_1 este lentila colimatoare, în focarul căreia se plasează fanta de intrare F a aparatului; a doua lentilă, L_2, formează imaginile fantei după ce radiația incidentă policromatică a fost descompusă în componentele ei monocromatice de către prismă (fig. 4.13).

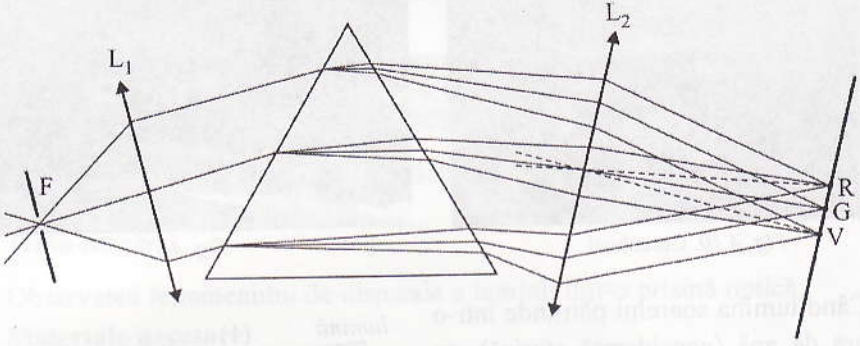


Fig. 4.13. Schema unui aparat spectral cu prismă

Știind că un fascicul paralel de raze monocromatice își formează imaginea punctiformă în planul focal al lentilei, vom găsi poziția acestui punct în locul unde o rază paralelă cu fasciculul (R sau G sau V) de o anumită culoare, dusă prin centrul lentilei, înțeapă planul focal al acesteia.

În figură se obține imaginea triplă a fantei de intrare, pentru că am ales trei radiații monocromatice.

Dacă sursa spectrală are 7 sau 20 de radiații monocromatice vom obține tot atâtea imagini ale aceleeași fante. Având în vedere forma fantei – o deschidere foarte îngustă (5–100 μm) între două lame metalice cu înălțime relativ mare (1–2 cm) – rezultă că fiecare radiație monocromatică a sursei se observă în spectru ca o linie colorată („linie spectrală").

Astfel, aparatul spectral descompune radiația complexă a sursei spectrale în radiațiile monocromatice componente.

Dacă în planul focal al lentilei L_2 avem o placă fotografică, aparatul se va numi *spectograf* și va înregistra pe emulsia fotografică întregul spectru deodată.

Dacă în același focar avem o fantă (de ieșire), aparatul se va numi *monocromator* și va lucra ca sursă de radiație monocromatică (asemenea unui filtru optic foarte fin).

Dacă însă piesa finală este o lupă, aparatul se va numi *spectroscop* și va folosi la observarea vizuală, directă, a spectrului unei surse de radiații ca: flacără, arc electric, tub de descărcări în gaze etc.

Probleme rezolvate

1. O prismă de cuarț are unghiul de refringență de 60°. Prin aceasta trece o radiație monocromatică pentru care indicele de refracție corespunzător este $n = 1{,}46$ sub un unghi de incidență de 30°. Să se determine:

a) deviația razei;

b) deviația minimă.

Rezolvare

a) Aplicăm legea refracției la prima față:

$$\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin r = 0{,}34246 \Rightarrow r = 20°.$$

Din $A = r + r' \Rightarrow r' = A - r = 40°$.

Aplicăm legea refracției la a doua față:

$$n \sin r' = \sin i' \Rightarrow i' = 69{,}8°.$$

Din $\delta = i + i' - A$ rezultă $\delta = 39{,}8°$.

b) Din $n = \dfrac{\sin\dfrac{\delta_m + A}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}} \Rightarrow \delta_{min} = 2 \cdot \arcsin 0{,}73 - 60° = 37{,}8°$.

2. O prismă cu unghiul de refringență de 50° formează un unghi de deviație minimă de 35°. Care va fi unghiul de deviație minimă dacă prisma se cufundă în apă ($n_a = 1{,}33$)?

Rezolvare

$$n = \frac{\sin\dfrac{\delta_1 + A}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}.$$

Pentru prisma cufundată în apă:

$$\frac{n}{n_a} = \frac{\sin\dfrac{\delta_2 + A}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}.$$

Împărțind relațiile membru cu un membru, obținem: $\sin\dfrac{\delta_2 + A}{2} = \dfrac{1}{n_a} \sin\dfrac{\delta_1 + A}{2}$

și apoi $\delta_2 = -A + 2 \arcsin\left(\dfrac{1}{n_a} \sin\dfrac{\delta_1 + A}{2}\right)$, adică $\delta_2 = 11°30'$.

3. Pe o prismă cu unghiul $A = 30°$ cade normal pe fața de intrare un fascicul îngust care iese din prismă deviat cu $\delta = 30°$. Cunoscând $\sin 15° = 0{,}2588$ și $\sin 26°30' = 0{,}4482$ aflați deviația minimă a prismei.

Rezolvare

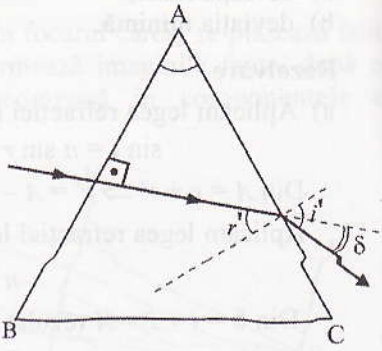
Din formula deviației, pentru incidență normală ($i = 0 = r$) obținem:

$$\delta = i' - A \text{ sau } i' = \delta + A = 60°.$$

Aplicăm legea refracției la a doua față a prismei:

$$n \sin r' = \sin i',$$

de unde: $n = \dfrac{\sin i'}{\sin r'}$.



Dar r' și A sunt egale (au același complement), deci

$$n = \frac{\sin i'}{\sin A} = \frac{\sin 60^o}{\sin 30^o} = \sqrt{3}.$$

Din formula deviației minime:

$$n = \frac{\sin\dfrac{\delta_m + A}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}, \text{ obținem:}$$

$$\sin\frac{\delta_m + A}{2} = 0{,}4482, \text{ sau } \frac{\delta_m + 30^o}{2} = 26°30'.$$

Rezultă: $\delta_m = 53° - 30° = 23°$.

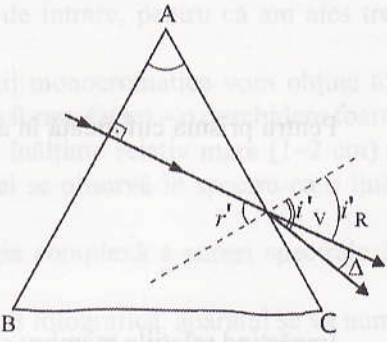
4. Pe fața AB a unei prisme ABC cu $\hat{A} = 30°$ cade perpendicular un fascicul de lumină albă. Știind că indicele de refracție este $n_R = 1{,}51$ pentru raza roșie, respectiv $n_V = 1{,}531$ pentru cea violetă, să se afle unghiul de dispersie dintre aceste raze la ieșirea din prismă.

Rezolvare

$i = 0 \Rightarrow r = 0$ pentru toate culorile.

Ca și în problema precedentă, $r' = A$ (au același complement).

Aplicăm legea refracției la a doua față:



$$n_R \cdot \sin r' = \sin i'_R \Rightarrow \sin i'_R = \frac{1{,}510}{2}$$

$$n_V \cdot \sin r' = \sin i'_V \Rightarrow \sin i'_V = \frac{1{,}531}{2}$$

Unghiul de dispersie este:

$$\Delta = i'_V - i'_R = \text{arc sin}\frac{1{,}531}{2} - \text{arc sin}\frac{1{,}510}{2} = 50° - 48°40' = 1°20'.$$

Test

Alegeți A dacă afirmația este adevărată sau F dacă afirmația este falsă:

1. A F Indicele de refracție al luminii printr-un mediu este direct proporțional cu viteza luminii prin acel mediu.

2. A F Indicele de refracție este dependent de permitivitatea electrică relativă ε_r și de permeabilitatea magnetică relativă μ_r a mediului.

3. A F În cazul dispersiei normale, indicele de refracție crește cu creșterea lungimii de undă.

4. A F Deviația minimă între direcția de emergență și direcția de incidență la o prismă se produce dacă, în interiorul prismei, raza este paralelă cu baza prismei.

5. A F Prisma cu reflexie totală care întoarce raza luminoasă cu 180° este folosită la periscop.

6. A F Când lumina albă este dispersată de o prismă de sticlă, roșul este cel mai mult deviat.

7. A F Dispersia unghiulară depinde de diferența dintre indicii de refracție pentru lumina violetă și pentru lumina roșie.

Probleme propuse

1. Unghiul de refracție limită corespunzând materialului unei prisme cu unghiul la vârf $A = 60°$ este $l = 45°$. Să se deducă valorile: a) unghiului de deviație minimă δ_m și b) unghiul de incidență corespunzător.

R: a) $\delta_m = 30°$; b) $i = 45°$

2. Fie două prisme identice cu $n = \sqrt{2}$ și ale căror secțiuni sunt triunghiuri dreptunghice ABC și A'B'C'; unghiurile A și A' sunt drepte iar B și B' sunt de 30°. Se lipesc prismele astfel încât să formeze o prismă unică cu unghiul la vârf 60° (după liniile AB și A'B'). Se cere: a) unghiul de incidență al razelor monocromatice care traversează această prismă la minimum de deviație; b) valoarea unghiului de deviație minimă.

R: a) $i = 45°$; b) $\delta_m = 30°$

3. O radiație electromagnetică incidentă din vid pe o prismă optică de indice de refracție $n = \sqrt{3}$, sub unghiul $i = 60°$, parcurge prisma pe drumul de deviație minimă. Să se determine: a) valoarea unghiului de refracție; b) unghiul de deviație minimă; c) sinusul unghiului minim de incidență pe suprafața prismei, pentru care mai există un fascicul emergent din aceasta.

R: a) $r = 30°$; b) $\delta_m = 60°$; c) $\sin i_m = 0{,}72$

4. O rază de lumină monocromatică intră într-o prismă de crown ($n = 1{,}529$) sub unghiul de incidență $i = 22°$. Sub ce unghi iese din prismă, dacă unghiul prismei este $A = 41°$? Care este valoarea unghiului de deviație?

R: a) $i' = 42{,}08°$; b) $\delta = 23{,}08°$

5. Se dă o prismă optică a cărei secțiune ABC este un triunghi echilateral. Pe fața AB a prismei situate în apă cade o radiație monocromatică, astfel încât ea se propagă în prismă paralel cu baza BC. Să se calculeze: a) indicele de refracție n_p al prismei, știind că unghiul de deviație este $\delta_m = 30°$ și indicele de refracție al apei este

$n_a = 1{,}33$; b) valoarea indicelui de refracție n_m al unui mediu diferit de apă, pentru care în aceleași condiții de propagare (raza paralelă cu BC în prismă) unghiul δ_m este nul; c) care ar trebui să fie valoarea minimă n_{min} a indicelui de refracție al unui alt mediu, pentru care radiația incidentă pe prismă sub același unghi ca la punctul a) să nu mai intre în prismă?

R: a) $n_p = 1{,}88$; b) $n_m = n_p$;
c) $n_{min} = 2{,}66$

6. Secțiunea principală a unei prisme este un triunghi echilateral. Unghiul de incidență, egal cu unghiul de emergență, este de 45°. Se cere indicele de refracție al prismei.

R: $n = \sqrt{2}$

7. O rază care cade normal pe una din fețele unei prisme cu unghiul $A = 30°$ este emergentă prin fața opusă, fiind deviată cu $\delta = 30°$. Calculați indicele de refracție al prismei.

R: $n = \sqrt{3}$

8. Ce unghi de refringență are o prismă dacă acest unghi este egal cu unghiul de deviație minimă? Se cunoaște indicele de refracție al prismei, $n = 1{,}5$.

R: $A \approx 83°$

9. O prismă de sticlă ($n = 1{,}5$) cu unghiul de refringență $A = 60°$ are o față în contact cu aerul, iar cealaltă în contact cu apa ($n = 1{,}33$). O rază de lumină cade sub un unghi de 45° pe prima față și iese din a doua față în apă. Calculați unghiul δ dintre raza incidentă și raza emergentă.

R: $\delta = 21°30'$

10. O rază incidentă pe o prismă cu unghiul $A = 60°$, suferind deviația minimă, emerge sub unghiul $i' = 60°$. Se cere: a) unghiul de incidență; b) unghiul de deviație minimă; c) indicele de refracție al prismei.

R: a) $i = 60°$; b) $\delta_m = 60°$;
c) $n = \sqrt{3}$

4.2. INTERFERENȚA LUMINII

4.2.1. Interferența luminii este fenomenul de compunere în același loc a două sau mai multe unde luminoase.

Deoarece dintre cele două componente, $\vec{E}$ și $\vec{B}$, ale undei electromagnetice, efectul componentei magnetice este nesemnificativ asupra senzației vizuale, se va considera exclusiv influența componentei electrice $\vec{E}$ („vectorul luminos").

Vom numi intensitate luminoasă într-un punct valoarea medie în timp a lui E^2 în punctul considerat:

$$I = \langle E^2 \rangle \qquad (4.2.1)$$

Dacă $E = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$, atunci $I \sim E_0^2$ deoarece valoarea medie în timp a lui $\sin^2 \omega t$ este o constantă.

Rezultatul interferenței se poate aprecia numai după intensitatea luminoasă în punctul respectiv.

4.2.2. Condiția de coerență. Să considerăm două surse de lumină punctiforme S_1 și S_2 care emit radiații paralele de aceeași frecvență. În punctul P (fig. 4.14), elongațiile E_1 și E_2 vor fi:

$$E_1 = E_{01} \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$E_2 = E_{02} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Pentru simplificare vom considera că cele două unde au aceeași amplitudine.

$$E_{01} = E_{02} = E_0.$$

Atunci oscilația rezultantă în punctul P va fi:

$$E = E_1 + E_2 = E_0 [\sin(\omega t + \varphi_1) + \sin(\omega t + \varphi_2)]$$

adică:

$$E = 2E_0 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \qquad (4.2.2)$$

Oscilația rezultantă este deci tot o oscilație sinusoidală, având aceeași frecvență ca și cele două unde din care se compune. Amplitudinea oscilației rezultante este după cum rezultă din expresia lui E, (4.2.2)

$$A = 2E_0 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}, \qquad (4.2.3)$$

iar faza inițială:

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Atunci, oscilația rezultantă în P va avea ecuația generală:

$$E = A \sin(\omega t + \varphi).$$

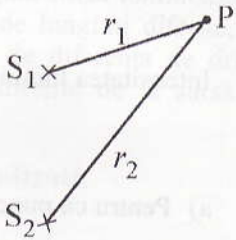


Fig. 4.14. Două surse de lumină punctiforme S_1 și S_2 care emit radiații paralele de aceeași frecvență

Pentru ca fenomenul de interferență a luminii să poată fi observat trebuie ca iluminarea în punctul P să fie aceeași în decursul timpului, adică amplitudinea undei rezultante să fie constantă în timp. Din relația lui A (4.2.3) rezultă că $I \sim < A^2 > =$ = constant dacă $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ este constantă în timp.

În acest caz spunem că undele sunt coerente. Așa cum s-a văzut în paragraful 2.5, două unde sunt coerente dacă:

1) au aceeași frecvență;

2) au diferența de fază $\Delta\varphi$ constantă în timp.

Undele coerente dau o imagine de interferență staționară, constantă în timp.

4.2.3. Condiții de obținere a maximelor sau minimelor de interferență

În câmpul de interferență al undelor coerente vor exista zone mai luminoase (maxime de interferență) și zone mai întunecoase (minime de interferență).

Pentru a vedea de cine depinde intensitatea luminoasă a unui punct P din câmpul de interferență, vom considera suprapunerea a două unde coerente ai căror vectori luminoşi E au valorile:

$$E_1 = E_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$$

$$E_2 = E_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)$$

unde r_1 şi r_2 sunt drumurile parcurse de cele două unde de la sursele S_1, respectiv S_2 până la punctul P (fig. 4.14), arbitrar ales în câmpul de interferență.

Rezultatul compunerii va fi:

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) + \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)\right].$$

Transformând suma din paranteză în produs, obținem:

$$E = 2E_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{r_2 - r_1}{2} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right).$$

Amplitudinea undei rezultante este:

$$A = 2E_0 \cos \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}. \qquad (4.2.4)$$

Intensitatea luminoasă în punctul P va fi:

$$I \sim A^2 = 4\ E_0^2 \cos^2 \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}. \qquad (4.2.5)$$

a) Pentru ca punctul P să fie un maxim de interferență trebuie ca:

$$\cos^2 \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = 1 \quad \text{sau} \quad \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = k\pi$$

de unde rezultă:

$$r_2 - r_1 = k\lambda = 2k \frac{\lambda}{2}. \qquad (4.2.6)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

Punctul P, arbitrar ales, este un maxim de interferență dacă diferența drumurilor de la el la cele două surse S_1 şi S_2 este un multiplu par de $\frac{\lambda}{2}$

b) Pentru ca punctul P să fie un minim de interferență, din (4.2.5) rezultă:

$$\cos^2 \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

adică:

$$r_2 - r_1 = (2k+1) \frac{\lambda}{2}. \qquad (4.2.7)$$

Punctul *P* este un minim de interferență dacă diferența distanțelor parcurse de lumină în vid sau aer până la el, este un multiplu impar de semilungimi de undă.

Observație. Dacă cele două unde nu se propagă în vid (cum s-a considerat), ci într-un mediu cu indice de refracție $n \neq 1$, atunci trebuie luată în considerare diferența dintre drumurile optice.

Într-un mediu transparent având indicele de refracție n, *drumul optic* (r) este produsul dintre indicele de refracție și lungimea drumului geometric r:

$$(r) = nr.$$

Deci, dacă în figura 4.14 spațiul dintre surse și punctul P ar fi un mediu transparent cu indicele de refracție n, diferența de drum optic ar fi $n(r_2 - r_1)$. În acest caz, condițiile de maxim sau minim vor fi respectiv:

$$n(r_2 - r_1) = 2k\frac{\lambda}{2} \quad \text{și} \quad n(r_2 - r_1) = (2k+1)\frac{\lambda}{2}. \qquad (4.2.8)$$

4.2.4. Obținerea undelor coerente în optică

Două surse de lumină obișnuite nu produc unde coerente deoarece atomii lor emit în mod aleator „trenuri de unde" succesive de diverse durate și diverse orientări ale vectorului luminos $\vec{E}$.

Pentru a obține unde luminoase coerente și a observa interferența lor, se utilizează metoda descompunerii unei unde emisă de o singură sursă luminoasă în două sau mai multe unde care, după ce parcurg drumuri de lungimi diferite, se întâlnesc. Rezultatul interferenței obținute astfel, depinde de diferența de drum dobândită de undele coerente în parcurgerea drumurilor diferite de la sursă la punctul considerat din imaginea de interferență.

4.2.5. Dispozitive de interferență nelocalizată

4.2.5.1. Dispozitivul lui Young

Dispozitivul lui Young oferă un procedeu de obținere a undelor coerente prin divizarea frontului de undă.

Acest dispozitiv constă din (fig. 4.15):

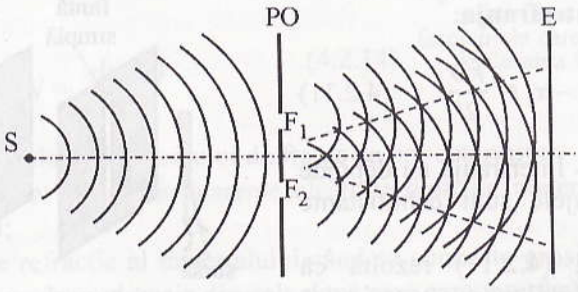


Fig. 4.15. Dispozitivul lui Young. Alcătuire

– sursă S de lumină (un filament drept, subțire, incandescent, prevăzut cu un filtru optic care lasă să treacă numai radiații de o anumită lungime de undă);

– paravan opac PO în care sunt practicate două fante dreptunghiulare F_1 şi F_2 paralele atât între ele cât şi cu filamentul incandescent;
– un ecran E pentru observarea imaginii de interferenţă.

În timp ce distanţa D până la ecran este de ordinul metrilor, distanţa $2l$ dintre fante este mai mică de 1 mm ($D >> 2l$) iar lărgimea fantelor este de ordinul zecimilor de milimetru. Unghiul α este foarte mic.

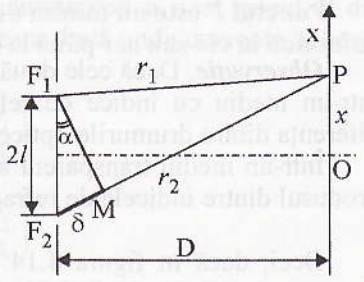


Fig. 4.16. Între două raze care interferă există o diferenţă de drum δ

Să exprimăm diferenţa de drum (fig. 4.16). Construim F_1M astfel încât $MP = r_1$, adică ΔF_1MP să fie isoscel.

Din figură se obţin următoarele relaţii:

$$r_1^2 = D^2 + (x - l)^2$$

$$r_2^2 = D^2 + (x + l)^2$$

Făcând diferenţa avem:

$$r_2^2 - r_1^2 = 4xl \Leftrightarrow (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 4xl.$$

Dacă $x = OP << D$, putem face aproximaţia $r_1 + r_2 = 2D$, de unde rezultă:

$$r_2 - r_1 = \frac{2xl}{D} \qquad (4.2.9)$$

Cum pentru maximul de ordin k:

$$r_2 - r_1 = 2k\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_k = \frac{k\lambda D}{2l} \qquad (4.2.10)$$

Analog, pentru maximul de ordin $(k + 1)$:

$$x_{k+1} = \frac{(k+1)\lambda D}{2l}.$$

Distanţa dintre două maxime succesive este **interfranja:**

$$i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda D}{2l} \qquad (4.2.11)$$

Observaţie. Interfranja nu depinde de x, deci franjele sunt echidistante (fig. 4.17).

Din relaţia (4.2.11) rezultă că interfranja i va fi mai mare sau mai mică după cum ecranul E se află la o distanţă mai mare sau mai mică.

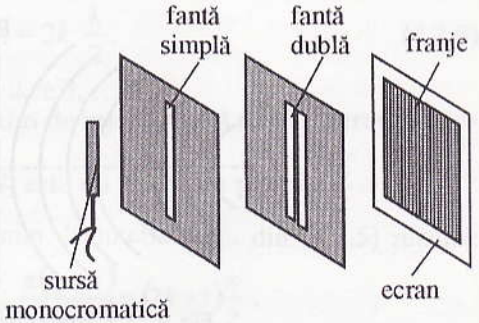


Fig. 4.17. Pe ecranul dispozitivului Young se obţin franje paralele şi echidistante

Regiunea din spațiu în care are loc interferența este destul de mare, franjele formându-se pe ecran pentru orice poziție a lui în această regiune. Spunem că s-au obținut **franje nelocalizate.**

4.2.5.2. Deplasarea franjelor. Introducând în calea fasciculului provenit de la sursa F_1 o lamă subțire cu grosimea e dintr-un material cu indicele de refracție n, sistemul de franje se deplasează în sus (fig. 4.18). Franja centrală se deplasează din O în O'. Prin fața punctului O defilează N franje. Acest fenomen se întâmplă deoarece introducerea lamei provoacă, pentru raza care o traversează, o întârziere de drum egală cu $(n-1)\,e$.

Pentru a compensa această întârziere, trebuie ca (pentru franja centrală):

$$F_2O' - F_1O' = (n-1)\,e.$$

Din (4.2.9) avem:

$$F_2O' - F_1O' = \frac{2l \cdot x}{D}\cdot$$

Din ultimele două relații obținem:

$$(n-1)e = \frac{2l \cdot x}{D} \quad \text{adică} \quad x = \frac{D(n-1)e}{2l} \tag{4.2.12}$$

unde x este deplasarea franjei centrale.

Întrucât $\frac{D}{2l} = \frac{i}{\lambda}$ (din relația (4.2.11), relația (4.2.12) devine:

$$x = \frac{i\,e(n-1)}{\lambda}. \tag{4.2.13}$$

Numărul de franje N care au defilat prin punctul O este:

$$N = \frac{OO'}{i} = \frac{x}{i}$$

deci

$$N = \frac{e(n-1)}{\lambda}\cdot \tag{4.2.14}$$

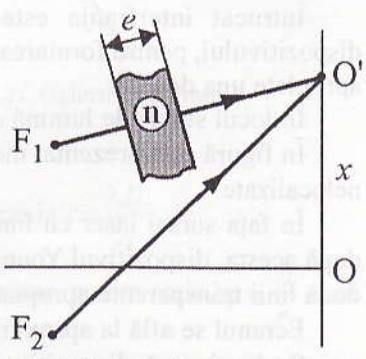


Fig. 4.18. Introducerea unei lame subțiri în calea unuia din fasciculele care interferă, duce la deplasarea franjei centrale

Prin studiul deplasării sistemului de franje se pot determina:

– grosimea unor piese transparente alcătuite dintr-un material cu indice de refracție cunoscut;

– indicele de refracție al materialului când se cunoaște grosimea stratului de material introdus pe drumul uneia din cele două raze care interferă;

– lungimea de undă, când se cunosc n și e.

ACTIVITATE EXPERIMENTALĂ

Dispozitivul Young

Tema

Formarea şi observarea franjelor de interferenţă cu dispozitivul Young

Materiale necesare

- banc optic;
- sursă de tensiune stabilizată;
- lampă laser;
- suporturi culisante;
- dispozitiv Young;
- fantă simplă.

Fig. 4.19. Dispozitiv experimental pentru obţinerea franjelor nelocalizate

Modul de lucru

Întrucât interfranja este invers proporţională cu distanţa dintre fantele dispozitivului, pentru formarea şi observarea franjelor trebuie ca fantele să fie foarte apropiate una de alta.

În locul sursei de lumină clasice se poate utiliza un laser.

În figură este prezentat montajul cu care se pot observa franjele de interferenţă nelocalizate.

În faţa sursei laser cu lumină roşie s-a aşezat un paravan opac cu o fantă şi, după acesta, dispozitivul Young (un diapozitiv de celuloid negru pe care s-au trasat două linii transparente apropiate, având rol de fante).

Ecranul se află la aproximativ 3 m (un perete poate servi drept ecran).

Se luminează dispozitivul cu radiaţia laser, care trebuie să treacă prin fanta simplă şi apoi prin cele două fante (toate fantele sunt paralele între ele).

Franjele de interferenţă luminoase şi întunecoase se vor privi de aproape (pe ecran), direct sau cu ajutorul unei lupe.

Notând distanţa dintre fante d, distanţa de la fante la ecran – D, interfranja – i şi cunoscând lungimea de undă a radiaţiei roşii a laserului $\lambda = 632{,}8$ nm se poate determina una din mărimile ce intervin în relaţia $\lambda = \frac{di}{D}$.

Franjele obţinute cu dispozitivul Young sunt paralele, echidistante şi au aceeaşi luminozitate (fig. 4.20).

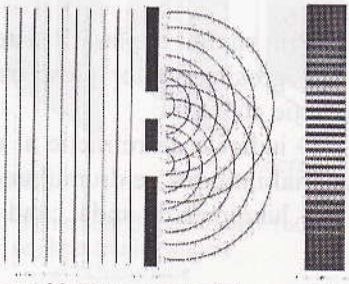


Fig. 4.20. Obţinerea franjelor paralele şi echidistante

4.2.5.3. Alte dispozitive echivalente cu dispozitivul Young

Dispozitivul lui Young este un dispozitiv interferențial cu două fascicule coerente. Formulele deduse sunt valabile în cazul oricărui dispozitiv cu două fascicule coerente dacă schema dispozitivului se poate reduce la cea din figura 4.16, ca de exemplu: oglinda lui Lloyd, oglinzile Fresnel, bilentila Billet, biprisma Fresnel etc.

1. Oglinzile lui Fresnel

La acest dispozitiv, cele două surse coerente sunt două imagini virtuale ale aceleiași surse în două oglinzi plane care fac între ele un unghi de apoximativ 180°. Cele două imagini ale sursei sunt notate cu S_1 și S_2 (fig. 4.21). Ecranul se așază perpendicular pe mediatoarea segmentului S_1S_2 la distanța D_0 de muchia oglinzilor.

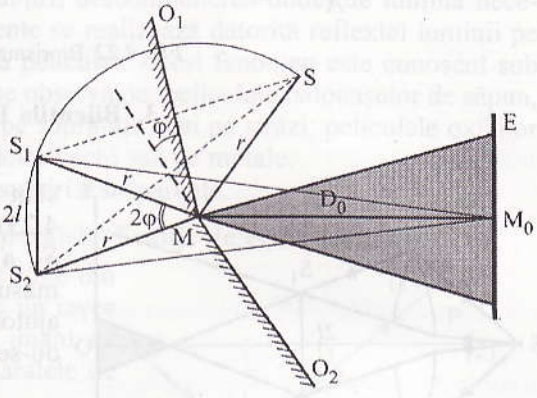


Fig. 4.21. Oglinzile lui Fresnel

Izvorul S poate fi o fantă paralelă cu muchia M comună a oglinzilor plane. Maximele de interferență au aspectul unor franje drepte, paralele.

În figura 4.21 M_0 este maxim de ordinul zero.

Prin asemănare cu dispozitivul lui Young, interfranja $i = \dfrac{\lambda D}{2l}$.

Din figură $\Rightarrow D \cong D_0 + r$. Întrucât unghiul φ este mic, putem scrie $2\varphi = \dfrac{2l}{r}$, deci $l = \varphi r$. Așadar, interfranja în acest caz este

$$i = \frac{\lambda(D_0 + r)}{2\varphi r}.$$

Unghiul φ trebuie să fie foarte mic căci altfel se obțin franje prea înguste. Când observarea se face în lumină albă, franja centrală apare albă ($k = 0$, se intensifică toate lungimile de undă), iar celelalte sunt colorate.

2. Biprisma Fresnel

Lumina de la sursa S se refractă în două prisme cu unghiurile de refracție A și A' mici, așezate cu bazele față în față (fig. 4.22). Fiecare prismă deviază razele spre baza ei și astfel se formează două surse de lumină S_1 și S_2 virtuale și coerente. Razele venite de la aceste surse se suprapun și dau franje de interferență care se pot observa pe un ecran fig. 4.22, b).

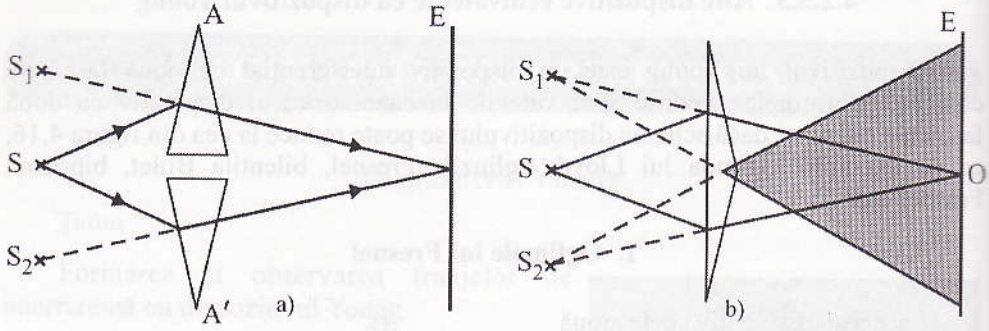


Fig. 4.22. Biprisma Fresnel

3. Bilentila Billet

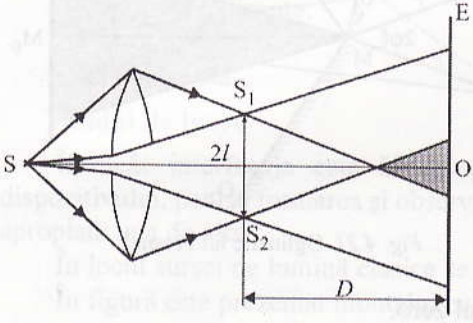


Fig. 4.23. Bilentilele Billet

O lentilă tăiată în două; jumătățile sunt puțin înclinate una față de alta (fig. 4.23). Acestea dau două imagini reale S_1 și S_2 ale unei fante S ceea ce permite măsurarea directă a distanțelor $2l$ și D cu ajutorul cărora se poate afla λ, măsurându-se interfranja i.

4. Oglinda lui Lloyd

Cu oglinda lui Lloyd se obțin franje de interferență datorate interferențelor între razele provenite direct de la sursa S și cele reflectate care provin de la imaginea virtuală S'. Un ecran este așezat la marginea oglinzii în O (fig. 4.24).

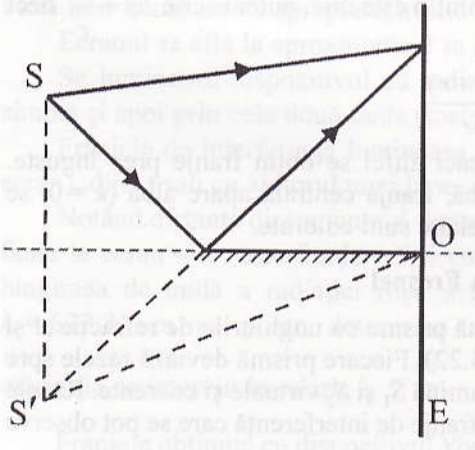


Fig. 4.24. Oglinda lui Lloyd

Sursa S poate fi o fantă paralelă cu suprafața oglinzii.

Particularitatea fenomenului de interferență observat cu ajutorul oglinzii lui Lloyd constă în faptul că franja centrală nu este luminoasă ci întunecată, căci unda reflectată are un salt de fază egal cu π față de unda incidentă (reflexie cu pierdere de $\frac{\lambda}{2}$).

În punctul O, care este situat la egală distanță de S și S', se va produce franja centrală care este un minim.

4.2.6. Dispozitive de interferență localizată

Cu ajutorul dispozitivului lui Young se obțineau unde coerente prin divizarea frontului de undă.

Un fascicul de lumină poate fi, de asemenea, divizat cu una sau mai multe suprafețe reflectătoare, de pe care o parte din lumină se reflectă iar altă parte se transmite cu intensitățile corespunzătoare. Cum intensitatea luminii este o măsură a pătratului amplitudinii, spunem că undele coerente se obțin, în acest caz, *prin divizarea amplitudinii.*

În natură se observă adeseori fenomene de interferență; de exemplu, la iluminarea unei pelicule transparente subțiri, descompunerea undei de lumină necesară pentru apariția fasciculelor coerente se realizează datorită reflexiei luminii pe fața anterioară și pe cea posterioară a peliculei. Acest fenomen este cunoscut sub numele de *culorile lamelor subțiri* și se observă pe: peliculele balonașelor de săpun, petele de ulei sau de petrol care apar pe suprafața apei pe străzi, peliculele oxizilor transparenți întâlniți pe suprafața sticlelor vechi sau pe metale.

Vom studia două forme de lame subțiri transparente.

4.2.6.1. Lama cu fețe plan paralele. Franje de egală înclinare

Fie o radiație monocromatică ce vine din mediul de indice de refracție n_1 de la un izvor întins, îndepărtat, S și cade sub un unghi de incidență i pe o lamă cu fețe plan paralele de indice de refracție $n_2 > n_1$ (fig. 4.25).

În acest caz, undele coerente obținute prin reflexie și refracție (1) și (2) merg paralel, iar interferența lor se observă cu ochiul adaptat pentru infinit, sau în planul focal al unei lentile, de aceea spunem că este vorba despre **franje localizate la infinit.**

În funcție de diferența de drum optic a undelor, în punctul P se obțin maxime sau minime de interferență.

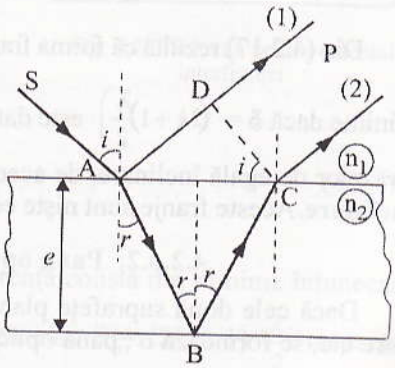


Fig. 4.25. Unde coerente obținute prin divizarea undei incidente. Lama cu fețe plan paralele

Între razele (1) și (2) care interferă, diferența de drum optic este:

$$\delta = n\,(AB + BC) - \left(AD - \frac{\lambda}{2}\right), \qquad (4.2.15)$$

unde $n = \frac{n_2}{n_1}$ este indicele relativ al lamei față de mediu, iar $\frac{\lambda}{2}$ este pierderea de drum optic a undei reflectate în punctul A (reflexie cu schimbare de fază pe un mediu optic mai dens).

În $\triangle ABC$: $AB = \frac{e}{\cos r}$ și $AC = 2e \operatorname{tg} r$.

În $\triangle ADC$: $AD = AC \sin i$.

Deci AD = $2e$ tg r sin i. Înlocuim în (4.2.15):

$$\delta = 2n\frac{e}{\cos r} - 2e\frac{\sin r}{\cos r}\sin i + \frac{\lambda}{2} =$$

$$= 2e\left(\frac{n}{\cos r} - \frac{\sin^2 r}{\cos r}\cdot\frac{\sin i}{\sin r}\right) + \frac{\lambda}{2} =$$

$$= \frac{2ne}{\cos r}(1-\sin^2 r) + \frac{\lambda}{2}, \text{ întrucât } \frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

Deci: $$\delta = 2\,n\,e\cos r + \frac{\lambda}{2} \qquad (4.2.16)$$

Se poate pune în evidență dependența diferenței de drum δ de unghiul i de incidență; aplicăm $\cos r = \sqrt{1-\sin^2 r}$ și $\sin r = \frac{\sin i}{n}$ și obținem:

$$\delta = 2e\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}. \qquad (4.2.17)$$

Din (4.2.17) rezultă că forma franjelor de interferență (maxime dacă $\delta = 2k\frac{\lambda}{2}$ sau minime dacă $\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$) este dată de locul geometric al punctelor de interferență a razelor de egală înclinare, de aceea spunem că este vorba despre **franje de egală înclinare.** Aceste franje sunt niște cercuri concentrice, numite **inelele lui Heidinger.**

4.2.6.2. Pana optică. Franje de egală grosime

Dacă cele două suprafețe plane ce delimitează lama subțire fac un unghi mic între ele, se formează o „pană optică" (fig. 4.26).

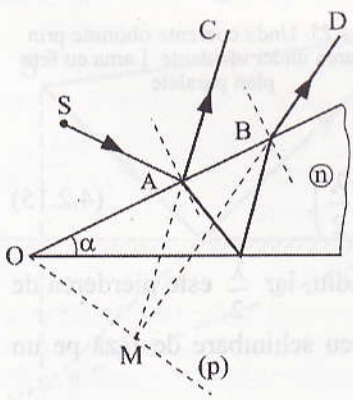


Fig. 4.26. Pana optică

Punctul de localizare a franjei ce corespunde razei incidente SA va fi M, la intersecția prelungirilor razelor AC și BD. Toate punctele de localizare a franjelor provenite de la raze incidente paralele cu SA se vor afla într-un plan (P) ce trece prin vârful penei O.

Dacă fasciculul este perpendicular pe suprafața superioară a penei, ținând cont că unghiul α este foarte mic (de ordinul minutului), planul de localizare a franjelor se va afla în interiorul penei, practic pe suprafața penei. Din acest motiv spunem că este vorba despre **franje localizate pe lamă.**

Franjele sunt drepte, paralele între ele și cu muchia penei și echidistante. Condiția de maxim sau minim este determinată de relația (4.2.16) pentru incidență normală:

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2}. \qquad (4.2.18)$$

Starea de interferență într-un punct de pe lamă este determinată de grosimea lamei în acel punct, de unde și denumirea de **franje de egală grosime.**

La incidență normală, interfranja i se calculează astfel (fig. 4.27).

Fie e_k o grosime oarecare a penei pentru care avem un maxim de ordin k.

$$\Rightarrow 2n_k + \frac{\lambda}{2} = k\lambda.$$

Analog pentru maximul de ordin $k + 1$:

$$2e_{k+1} + \frac{\lambda}{2} = (k+1)\lambda.$$

Rezultă (scăzând prima relație din a doua):

$$e_{k+1} - e_k = \frac{\lambda}{2n}.$$

Dar conform figurii 4.27 avem:

$e_{k+1} - e_k = \alpha \cdot i$, unde i este interfranja.

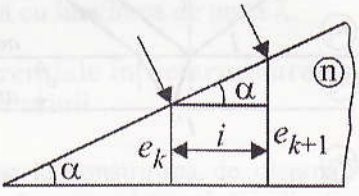


Fig. 4.27. Schemă pentru calculul interfranjei

Deci: $\frac{\lambda}{2n} = \alpha\, i$ sau

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha n}. \qquad (4.2.19)$$

În lumină monocromatică, figura de interferență constă din minime întunecate și maxime luminoase de o singură culoare, după cum $\delta = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$ respectiv $\delta = 2k\frac{\lambda}{2}$. În cazul iluminării cu lumină albă, lumina reflectată va avea o nuanță sau alta, în funcție de valorile mărimilor n, e, r și λ.

4.2.6.3. Aplicații în tehnică ale interferenței localizate

Interferența produsă de lame subțiri are foarte multe aplicații în tehnică, dintre care amintim:

1. Verificarea planeității suprafețelor

Calitatea unei suprafețe se apreciază prin valoarea cât mai mică, de ordinul micronilor sau mai mică, a denivelărilor de la suprafața plană.

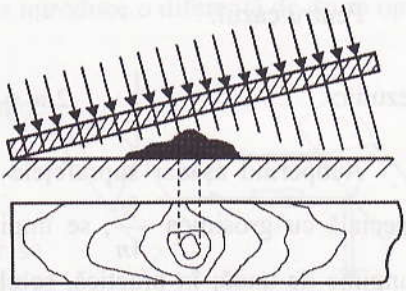


Fig. 4.28. Deformarea franjelor de egală grosime datorită abaterilor de la planeitate

Se poate verifica gradul de planeitate cu ajutorul interferenței produsă în pana de aer formată între o placă subțire de sticlă având fețele perfect plan-paralele și suprafața de studiat (fig. 4.28).

La iradierea cu lumină monocromatică, apare o succesiune de franje luminoase; când suprafața studiată este perfect plană, franjele sunt paralele între ele și paralele cu muchia de intersecție a celor două fețe.

Orice denivelare determină curbarea franjelor de egală grosime, figura de interferență amintind de curbele de nivel din topografie (fig. 4.28).

2. Optica albastră

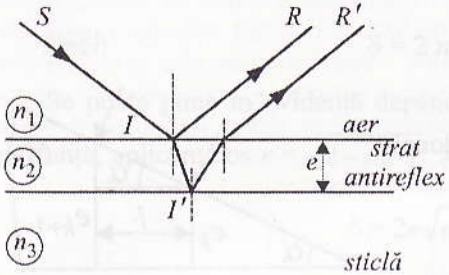


Fig. 4.29.

În mod obișnuit, razele de lumină care cad pe obiectivul unui aparat optic se reflectă parțial. Deoarece razele reflectate nu mai străbat sistemul optic, rezultă o pierdere în ceea ce privește luminozitatea obiectivului. Se pot micșora aceste pierderi, acoperind suprafețele lentilelor cu câte un strat subțire dintr-o substanță al cărei indice de refracție are o valoare intermediară indicelui de refracție al aerului, respectiv al sticlei (ex.: criolit, Na_3AlF_6 cu $n = 1{,}36$). Razele de lumină care se reflectă după ce cad pe suprafața superioară a acestui strat interferă cu razele care se reflectă pe suprafața sa inferioară (fig. 4.29).

Considerând cazul incidenței normale, diferența de drum optic a razelor este:

$$\delta = \left(2nII' + \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{\lambda}{2} = 2nII' = 2ne.$$

Atât la prima cât și la a doua față reflexia a fost cu pierdere de $\frac{\lambda}{2}$ deoarece $n_1 < n_2 < n_3$.

Dacă diferența de drum optic este un număr impar de $\frac{\lambda}{2}$, razele R și R' care interferă se sting reciproc.

Pentru cazul: $\delta = \frac{\lambda}{2}$

rezultă: $2ne = \frac{\lambda}{2}$ sau $e = \frac{\lambda}{4n}$.

Acoperind așadar suprafețele lentilelor cu un strat subțire dintr-o substanță specială cu grosimea $\frac{\lambda}{4n}$, se împiedică reflexia razelor de lumină care au acea lungime de undă; în practică, se elimină fenomenul de reflexie a luminii galben-verde, pentru care ochiul are sensibilitate maximă, de către obiectiv.

Rezultatul este că pe placa fotografică ajunge mai multă lumină din centrul omeniului vizibil iar imaginile de pe film apar mai luminoase.

Deoarece radiațiile albastră și roșie (din marginile spectrului) sunt mai puțin tenuate la reflexie și interferență pe stratul de criolit, lumina reflectată de obiectiv onține mai multă radiație roșu-violet, ochiul văzând o colorație albastră-violacee, e unde numele de „optică albastră".

3. Filtrele interferențiale

Dintre aplicațiile de mare însemnătate practică ale interferenței în lumină aralelă se remarcă utilizarea peliculelor subțiri în calitate de straturi de acoperire entru îmbunătățirea transmitanței sau reflectanței dispozitivelor optice.

Au fost realizate astfel straturi de acoperire antireflectătoare, straturi perfect eflectătoare și filtre cu ajutorul cărora se poate selecta, dintr-un fascicul paralel de umină albă, o anumită componentă monocromatică cu lungimea de undă λ.

4.2.7. Utilizarea unor dispozitive interferențiale în determinarea unor caracteristici ale luminii

Fenomenele de interferență a luminii servesc la construirea de dispozitive interferențiale, numite interferometre, cu ajutorul cărora se determină indicele de refracție, lungimea de undă sau se pot măsura distanțe mari și mici. Metodele interferometrice se caracterizează prin înalta lor sensibilitate și precizie.

Deosebim două tipuri de interferometre:

a) interferometre la care se obține interferența a două raze (fascicule sau unde) luminoase: interferometrul Jamin, interferometrul Michelson;

b) interferometre la care se obține interferența mai multor raze coerente (interferență multiplă), ca de exemplu interferometrul Fabry-Perot.

a) Interferometre cu două fascicule.

Cel mai simplu, **interferometrul Jamin**, este format din două blocuri de sticlă groase (aproximativ 4 cm grosime), cu fețe plane și paralele; fețele posterioare sunt argintate (fig. 4.30). El poate fi folosit la determinarea indicilor de refracție ai mediilor gazoase (pentru care indicele de refracție $n_g \simeq 1$) și implicit a variației fine a parametrilor fizici (*temperatură, presiune, umiditate* etc.) de care depinde n_g.

În acest sens, în calea uneia dintre razele de lumină se introduce o cuvă de lungime l, umplută cu un gaz de studiu, care va introduce o diferență de drum optic suplimentară între cele două raze

$$\delta = l(n_g - n_a)$$

și deci o deplasare de N interfranje a franjei centrale:

$$N = \frac{l(n_g - n_a)}{\lambda}.$$

Ca urmare, în ocularul interferometrului se va observa o anumită deplasare a imaginii de interferență și din măsurarea acestei deplasări

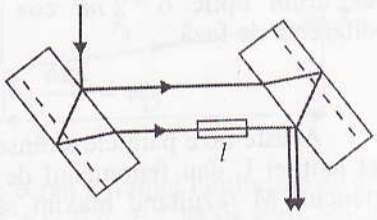


Fig. 4.30. Interferometrul Jamin

(numărând franjele ce trec prin fața unui reper), se determină n_g (lungimea cuvei l se cunoaște iar indicele de refracție al aerului $n_a = 1$).

Interferometrul Michelson (fig. 4.31) în care interferă raze care parcurg drumuri reciproc perpendiculare (CO_1 și BO_2) prezintă interes mai ales pentru că cu ajutorul lui s-a efectuat celebra experiență Michelson-Morley din anul 1896 care a demonstrat inexistența eterului luminos (privit ca suport pentru propagarea undelor luminoase).

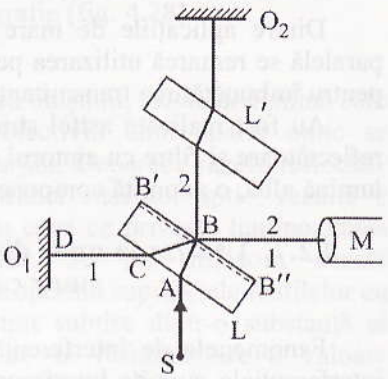


Fig. 4.31. Interferometrul Michelson.
Raza incidentă: SA.
În B: despărțirea razelor 1 și 2.
Raza 1 urmează drumul B C D C B M.
Raza 2 urmează drumul BL'O_2 L'BM.
În câmpul instrumentului optic M se observă fenomenul de interferență.
– fața BB' a lamei L este semiargintată;
– lama L' este simplă (de sticlă).

Cu acest dispozitiv, Michelson a măsurat metrul etalon în lungimi de undă λ ale radiației roșii de cadmiu (Cd).

b) Interferometre cu fascicule multiple

Pentru obținerea unor franje de interferență fine, se întrebuințează interferența de fascicule multiple. Fasciculele multiple coerente se obțin prin reflexia razelor pe suprafețe cu coeficient de reflexie ridicat, cum sunt suprafețele semimetalizate (semiargintate). În felul acesta raza reflectată este comparabilă ca amplitudine cu raza incidentă.

Interferometrul Fabry – Perot

Partea principală o constituie două plăci plane paralele de sticlă cu fețele interioare semiargintate (fig. 4.32).

Din raza incidentă SA se obțin razele paralele cu amplitudine descrescândă 1, 2, 3, 4, care prezintă una față de alta aceeași diferență de drum optic $\delta = 2\,nd\cos i$, deci aceeași diferență de fază

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}.$$

Aceste raze paralele strânse în planul focal al lentilei L dau fenomenul de interferență, în punctul M rezultând maxim sau minim după cum $\delta = k\lambda$ respectiv $(2k+1)\frac{\lambda}{2}$.

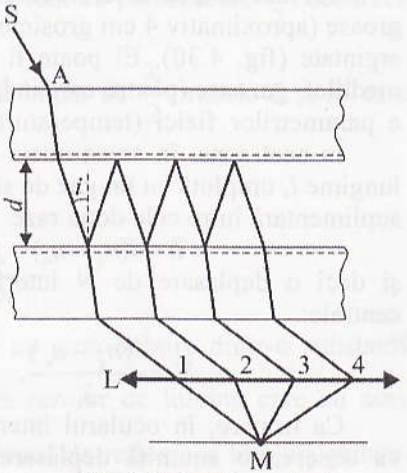


Fig. 4.32. Interferometrul Fabry-Perot

În cazul unui izvor întins care trimite raze în toate direcțiile, totalitatea punctelor M se găsește pe cercuri concentrice ale căror proiecții sunt corespunzătoare inelelor lui Heidinger. Aceste franje de interferență sunt extrem de fine în comparație cu inelele lui Heidinger.

Distanța dintre lamele interferometrului se poate varia treptat, căci una dintre ele este fixă, iar cealaltă este așezată pe un cărucior mobil care se deplasează păstrând lama paralelă cu ea însăși.

Cunoscând grosimea d a etalonului se poate determina o lungime de undă necunoscută a unei radiații cu deosebită precizie.

Probleme rezolvate

1. Un dispozitiv Young se cufundă în apă. Notăm cu i interfranja în aer și cu i' interfranja în apă. Apa are indicele de refracție n. Care este relația între interfranja în apă și interfranja în aer?

Rezolvare

Diferența de drum optic, în apă, este:

$$n(r_2 - r_1)$$

iar din relația (4.2.9) obținem: $n(r_2 - r_1) = \frac{2l \cdot x \cdot n}{D}$.

Pentru maximul de ordin k rezultă, folosind (4.2.10):

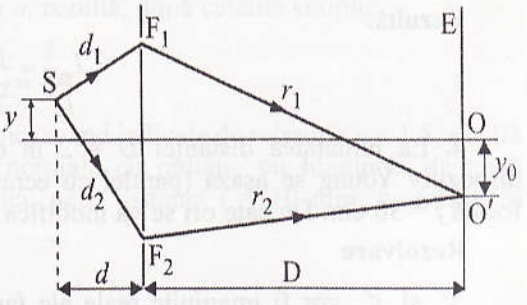
$$x_k = \frac{kD\lambda}{2l \cdot n}.$$

Așadar, interfranja în apă va fi:

$$i' = x_{k+1} - x_k = \frac{D\lambda}{2l \cdot n} = \frac{i}{n}.$$

Interfranja scade de n ori.

2. Presupunând că sursa de lumină se găsește la distanța d de planul fantelor și la distanța y de axa de simetrie a dispozitivului Young, în condițiile în care imaginea de interferență se obține pe ecranul aflat la distanța D de planul fantelor, determinați expresia distanței y_0 de la franja luminoasă de ordinul zero la axa de simetrie a dispozitivului Young.



Rezolvare

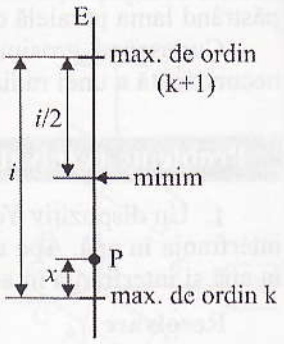
Pentru ca punctul O′ să corespundă poziției pe ecran a franjei luminoase de ordinul zero, trebuie ca diferența drumurilor optice $d_2 + r_2$ și $d_1 + r_1$ să fie zero, adică:

$$d_2 - d_1 = r_1 - r_2.$$

Deoarece din (4.2.9) avem $r_1 - r_2 = \frac{2l \cdot y_0}{D}$ şi analog $d_2 - d_1 = \frac{2l \cdot y}{d}$, rezultă:

$$y_0 = \frac{D \cdot y}{d}.$$

3. Un dispozitiv Young utilizează o radiaţie monocromatică. Să se determine raportul dintre intensitatea luminoasă a punctelor de pe ecran corespunzătoare unui maxim şi, respectiv, unui punct situat la o treime din distanţa dintre maxim şi minimul următor.



Rezolvare

Fie P punctul situat la o treime din distanţa dintre un maxim şi minimul următor. Din figură, rezultă:

$$x = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{i}{2}\right) = \frac{i}{6}.$$

Dar din relaţia (4.2.5) se ştie că intensitatea luminoasă este:

$I \sim A^2 = 4\,E_0^2 \cos^2 \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}$, iar din (4.2.9) avem:

$$r_2 - r_1 = \frac{2l \cdot x}{D}.$$

Deci, pentru punctul P:

$$I_P = 4\,E_0^2 \cos^2 \frac{\pi}{6} = 3E_0^2.$$

Pentru un maxim, $r_2 - r_1 = k\lambda$, deci:

$$I_{max} = 4\,E_0^2.$$

Rezultă:

$$\frac{I_{max}}{I_P} = \frac{4}{3}.$$

4. La jumătatea distanţei $D = 2$ m dintre planul fantelor şi ecranul unui dispozitiv Young se aşază (paralel cu ecranul) o lentilă convergentă cu distanţa focală $f = 30$ cm. De câte ori se va modifica interfranja?

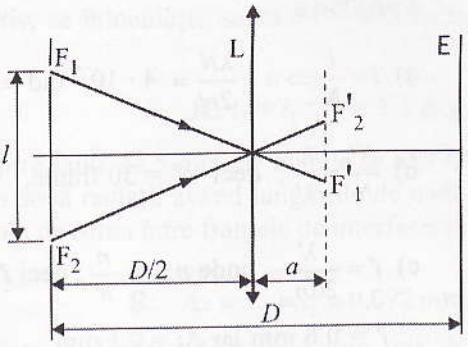
Rezolvare

F_1' şi F_2' vor fi imaginile reale ale fantelor dispozitivului. Aplicăm formula lentilelor:

$$\frac{1}{\frac{D}{2}} + \frac{1}{a} = \frac{1}{f},$$

unde:

$$a = \frac{f\,D}{D-2f}\,.$$



Imaginile F_1' şi F_2' vor acţiona ca urse coerente, formând franje pe anul E.

Distanţa $2l'$ dintre aceste surse o sim din formula măririi lentilelor:

$$\frac{2l'}{2l} = \frac{a}{\frac{D}{2}} \text{ sau } 2l' = \frac{2a\cdot 2l}{D}\,.$$

Noua interfranjă va fi:

$$i' = \frac{\lambda\left(\frac{D}{2}-a\right)}{2l'}$$

ică,

$$i' = \frac{\lambda\left(\frac{D}{2}-a\right)}{\frac{2a\cdot 2l}{D}} = \frac{\lambda D}{2l}\,\frac{\left(\frac{D}{2}-a\right)}{2a}\,.$$

Cum vechea interfranjă era $i = \frac{\lambda D}{2l}$, rezultă:

$$\frac{i'}{i} = \frac{\left(\frac{D}{2}-a\right)}{2a}\,.$$

Înlocuind şi valoarea găsită pentru a, rezultă, după calcule simple:

$$\frac{i'}{i} = \frac{2}{3}\,.$$

5. O pană optică de unghi foarte mic, având indicele de refracţie $n = 1{,}5$, se află aer şi este iluminată la incidenţă normală cu radiaţie cu lungimea de undă = 600 nm. Pe faţa inferioară a penei, pe o distanţă l = 10 mm, se formează = 20 franje.

Aflaţi:

a) unghiul penei;

b) numărul de franje obţinute pe aceeaşi distanţă dacă folosm lumina cu = 400 nm;

c) variaţia interfranjei faţă de cazul b) când cufundăm pana într-un mediu cu ndicele de refracţie $n' = 1{,}8$.

Rezolvare

a) $i = \frac{l}{N} \Rightarrow \alpha = \frac{\lambda N}{2nl} = 4 \cdot 10^{-4}$ rad $\approx 1'24''$

b) $\frac{N'}{N} = \frac{\lambda}{\lambda'}$, deci $N' = 30$ franje.

c) $i' = \frac{\lambda'}{2\alpha n_{rel}}$ unde $n_{rel} = \frac{n}{n'}$; deci $i' = \frac{\lambda' n i}{\lambda}$.

$i' = 0{,}6$ mm iar $\Delta i = 0{,}1$ mm.

Test

Citiți afirmațiile următoare. Alegeți A dacă afirmația este adevărată sau F dacă afirmația este falsă.

1. A F Rezultatul interferenței se apreciază după intensitatea luminoasă.
2. A F Intensitatea luminoasă într-un punct este valoarea medie în timp a lui E^2 în punctul considerat.
3. A F Două becuri obișnuite produc unde coerente.
4. A F Dacă diferența de drum dintre undele coerente este multiplu par de $\lambda/2$, se obține un minim de interferență.
5. A F La dispozitivul Young fantele sunt paralele între ele și paralele și cu filamentul sursei.
6. A F Cu dispozitivul Young se obțin franje localizate.
7. A F Lama cu fețe plan-paralele permite obținerea franjelor de egală înclinare.
8. A F Cu pana optică se obțin franje de interferență localizate.
9. A F Inelele lui Heidinger sunt franje de egală grosime.

Probleme propuse

1. În experiența lui Young se lucrează cu o radiație monocromatică cu $\lambda = 600$ nm. Distanța dintre fante este 1 mm iar distanța de la fante la ecran este 3 m. Să se găsească pozițiile primelor trei franje luminoase.

R: 0; 1,8 mm; 3,6 mm

2. O radiație electromagnetică cu lungimea de undă $\lambda_1 = 500$ nm produce într-un dispozitiv Young o figură de interferență cu interfranja $i_1 = 1$ mm. Ce valoare

va avea interfranja dacă, în acelaşi dispozitiv, se înlocuieşte sursa cu o altă sursă având lungimea de undă $\lambda_2 = 650$ nm.

R: $i_2 = i_1 \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1{,}3$ mm

3. Un dispozitiv Young are distanța dintre fante de 5 mm iar fantele se află la 1 m de ecran. Se iluminează dispozitivul cu două radiații având lungimile de undă $\lambda_1 = 480$ nm şi $\lambda_2 = 600$ nm. Care este distanța pe ecran între franjele de interferență de ordinul trei?

R: $\Delta x = x_3^1 - x_3 = 0{,}072$ mm

4. Două surse coerente de lumină aflate la distanța $2l = 0{,}24$ mm una de cealaltă se găsesc la $D = 2{,}5$ m de un ecran pe care se obțin franje de interferență. S-a constatat că pe distanța $d = 5$ cm se formează $N = 10{,}5$ franje de interferență. Să se calculeze lungimea de undă a radiației emise de surse.

R: $\lambda = \dfrac{2l \cdot d}{N \cdot D} = 457$ nm

5. Un dispozitiv Young având distanța între fante $d = 0{,}5$ mm şi distanța dintre planul fantelor şi ecran $D = 1{,}2$ m este iluminat cu lumină monocromatică cu $\lambda = 500$ nm. a) Să se calculeze interfranja observată pe ecran. b) Cât de mare trebuie să fie distanța dintre fantele dispozitivului pentru ca interfranja să se dubleze? c) Ce valoare are interfranja, dacă întregul dispozitiv se cufundă într-un lichid având indicele de refracție $n = 1{,}5$ în condițiile de la punctul a)?

R. a) $i = 1{,}2$ mm; b) $2l' = \dfrac{2l}{2}$; c) $i' = \dfrac{i}{n} = 0{,}8$mm

6. Distanța dintre fantele unui dispozitiv Young este de $2l$ iar ecranul de observație se află la distanța D. Interfranja măsurată pe ecran este $i = 0{,}56$ mm. Ulterior spațiul dintre fante şi ecran este umplut cu un lichid astfel încât interfranja devine $i_1 = 4{,}21 \cdot 10^{-4}$ m. Calculați indicele de refracție al lichidului.

R: $n = 1{,}33$

7. Un fasicul luminos cade normal pe un ecran cu două fante aflate la distanța $2l = 2{,}5$ mm una de alta. Se observă un sistem de franje de interferență pe un ecran aflat la distanța $D = 1$ m în spatele ecranului cu fante. Se introduce o lamă de sticlă ($n = 1{,}5$) de grosime $e = 10$ μm în fața fantei superioare. În ce sens şi cu cât se deplasează franjele pe ecran?

R: 2 mm în sus

8. O radiație de lumină monocromatică cu $\lambda = 550$ nm luminează un sistem de două fante, una din ele fiind acoperită cu un strat de mică ($n = 1{,}58$) pe care fasciculul cade perpendicular. În punctul central de pe ecran se găseşte a şaptea franje luminoasă. Calculați grosimea stratului de mică.

R: $e = \dfrac{7\lambda}{n-1} = 6{,}6$ μm

9. Sursa folosită pentru iluminarea fantelor unui dispozitiv Young este o sursă de lumină albă ale cărei lungimi de undă extreme sunt $\lambda_{min} = 380$ nm și $\lambda_{max} = 760$ nm. Cunoscând distanțele $D = 2$ m și $2l = 0{,}2$ mm determinați lărgimea spectrului de ordinul unu al imaginii de interferență.

R: $\Delta x = i_{max} - i_{min} = 3{,}8$ mm

10. În cazul unui dispozitiv Young cu $D = 1$ m și $2l = 0{,}6$ mm sursa de lumină monocromatică este dispusă pe axa de simetrie la distanța $d = 0{,}75$ m de planul fantelor. Cunoscând valoarea interfranjei, $i = 1$ mm, calculați: a) λ; b) poziția franjei întunecoase de ordinul șase; c) poziția celei de-a zecea franje întunecoase; d) noua poziție a franjei luminoase de ordinul zero, dacă sursa de radiație optică se deplasează cu 6 mm de-a lungul perpendicularei la axa de simetrie în punctul în care se afla inițial sursa.

R: a) $\lambda = 600$ nm; b) $x = 5{,}5$ mm; c) $x' = 9{,}5$ mm; d) $x_0 = \dfrac{Dy}{d} = 8$ mm

11. Fie un dispozitiv Young cu $D = 1$ m și $2l = 0{,}6$ mm în care sursa de lumină monocromatică este așezată inițial pe axa de simetrie la distanța $d = 0{,}5$ m de planul fantelor. Calculați: a) lungimea de undă a radiației folosite dacă distanța dintre a șasea franjă întunecoasă situată de o parte a axei optice și franja întunecoasă de ordinul șapte, situată de cealaltă parte a axei optice, este de 12 mm; b) noua poziție a franjei centrale dacă sursa de lumină se deplasează paralel cu planul fantelor, la distanța de 5 mm de axă; c) grosimea unui film transparent cu indicele de refracție $n = 1{,}5$ care, așezat în fața uneia din fantele dispozitivului, determină revenirea franjei luminoase de ordinul zero pe axa de simetrie.

R: a) $\lambda = 600$ nm; b) $x_0 = \dfrac{Dy}{d} = 10$ mm; c) $e = \dfrac{x_0 \cdot \lambda}{(n-1)i} = 12$ μm

12. Fantele unui dispozitiv Young distanțate cu $2l = 1$ mm sunt iluminate de la o sursă punctiformă de lumină albă, așezată pe axul optic principal la distanța $d = 10$ cm de planul fantelor. Două lamele foarte subțiri, de aceeași grosime $e = 0{,}2$ mm sunt plasate în dreptul fantelor. Indicii de refracție ai lamelelor sunt $n_1 = 1{,}7$ și $n_2 = 1{,}6$. Ecranul pe care se observă franjele se află la $D = 1$ m de planul fantelor. Să se afle: a) sensul de deplasare și poziția maximului alb față de axul optic principal; b) cu cât trebuie deplasată sursa pe verticală pentru ca maximul alb să revină în centrul figurii.

a) $\Delta x = \dfrac{De(n_1 - n_2)}{2l} = 2$ cm; b) $y = \dfrac{d \cdot \Delta x}{D} = 0{,}2$ cm

13. Un filtru special montat în fața fantelor unui dispozitiv Young permite trecerea luminii numai pentru lungimile de undă $\lambda_1 = 450$ nm și $\lambda_2 = 550$ nm. Distanța dintre fante este 0,1 mm iar distanța de la planul fantelor la ecranul de observare este 1,5 m. Să se determine la ce distanță de maximul central va avea loc o nouă suprapunere a maximelor de interferență pentru cele două lungimi de undă.

R: $k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2 \Rightarrow \dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{11}{9} \Rightarrow x = 11\dfrac{D\lambda_1}{2l} \Rightarrow x = 7{,}42$ cm

14. Într-un dispozitiv Young, o radiație monocromatică cu $\lambda_1 = 500$ nm produce o figură de interferență cu $i_1 = 1$ mm. În același dispozitiv, figura de interferență produsă de o altă radiație monocromatică, are primul maxim la distanța $x_1 = 1{,}2$ mm de franja centrală. Să se afle: a) lungimea de undă λ_2; *b) distanța minimă față de franja centrală la care se formează maxime în ambele* figuri de interferență; c) diferența $\Delta\upsilon$ dintre frecvențele celor două radiații.

R: a) $\lambda_2 = \frac{\lambda_1 x_1}{i_1} = 600$ nm; b) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{5}{6} \Rightarrow x = 6i_1 = 5x_1$;

$x = 6$ mm; c) $\Delta\upsilon = c\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = 10^{14}$ Hz

15. Un dispozitiv interferențial Young utilizează o radiație monocromatică. Să se determine raportul fluxurilor energetice incidente în puncte ale ecranului de observație situate la mijlocul distanței dintre un maxim de interferență și minimul următor, respectiv în maxime de interferență. (Indicație: a se vedea problema rezolvată nr. 3).

R: $\frac{\phi_p}{\phi_{max}} = \frac{1}{2}$

16. Pentru un dispozitiv Young să se determine de câte ori este mai mare intensitatea luminoasă într-un punct pe ecran aflat, față de maximul central, la o distanță egală cu o șesime din valoarea interfranjei, față de intensitatea luminoasă pe care ar crea-o pe ecran o singură fantă a dispozitivului.

R: $\frac{I_p}{I_1} = 3$

17. Prin iluminarea unei pene de sticlă cu indicele de refracție $n = 1{,}5$ cu un fascicul cu $\lambda = 650$ nm, incident normal pe suprafața acesteia, se formează franje de interferență. Să se calculeze unghiul penei dacă distanța dintre două minime este egală cu 12 mm.

R: $\alpha = \frac{\lambda}{2ni} = 18 \cdot 10^{-6}$ rad $= 3{,}7''$

18. O peliculă de săpun formează o pană. Franjele de interferență observate în lumina galbenă ($\lambda = 5461$ Å) sunt așezate câte 5 pe fiecare lățime de 2 cm. Lumina cade perpendicular pe suprafața peliculei și indicele de refracție al apei cu săpun este $n = 4/3$. Să se calculeze unghiul penei.

R: $\alpha = 5{,}2 \cdot 10^{-5}$ rad $= 10{,}73''$

19. Un fascicul de lumină cu lungimea de undă λ cade, la incidență normală, pe o pană optică de înălțime $h = 0{,}02$ mm și cu indicele de refracție $n = 1{,}5$, formându-se $k = 101$ franje luminoase și $(k - 1)$ franje întunecoase. Determinați lungimea de undă λ.

R: $\lambda = \frac{2nh}{k-1} = 600$ nm

20. Examinându-se franjele de interferență produse de o pană optică din sticlă cu $n = 1{,}5$ și plasată în apă cu $n = 4/3$ se constată că valoarea interfranjei este 0,5 mm. Cunoscând lungimea de undă a radiației utilizate $\lambda = 500$ nm, să se determine unghiul format de fețele penei optice.

$$\mathbf{R:}\ \alpha = \frac{\lambda}{2\frac{n}{n_a}i} = \frac{4}{9}\cdot 10^{-3} rad = 1'32''$$

4.3. DIFRACȚIA LUMINII

Difracția luminii, fenomen important ce confirmă natura ondulatorie a acesteia, a fost descoperit în 1665 de Grimaldi, care nota: „Lumina se propagă sau se răspândește nu numai direct, refractat sau reflectat, ci și într-un anumit al patrulea mod: împrăștiat".

Difracția luminii este fenomenul de propagare a luminii în spatele obstacolelor sau fantelor, atunci când dimensiunile acestora sunt comparabile, ca ordin de mărime, cu lungimea de undă a luminii.

Dificultatea punerii în evidență a acestui fenomen pe cale experimentală este legată de faptul că lungimile de undă ale luminii sunt foarte mici (de ordinul zecimilor de micron). Natura ne oferă totuși situații în care putem urmări calitativ fenomenul. De exemplu, dacă privim printr-un fulg de pasăre o sursă luminoasă îndepărtată, sau printr-o pânză de umbrelă, observăm o serie de irizații ce se datoresc fenomenului de difracție. Halourile (sau „cearcănele") care apar uneori în jurul Lunii sunt franje de difracție determinate de particulele de praf din atmosferă; asemenea halouri apar și în jurul becurilor folosite la iluminatul public.

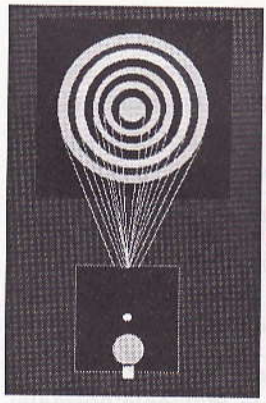


Fig. 4.33. Lumina produsă de bec suferă la trecerea prin orificiul circular fenomenul de difracție și produce pe ecran o imagine cu cercuri luminoase și întunecoase

Fenomenul de difracție este explicat de **principiul Huygens – Fresnel: Marginile fantei (sau obstacolului) atinse de unda incidentă devin surse de noi unde secundare care sunt coerente și dau pe ecran (sau pe retină, în cazul observării cu ochiul liber) o figură de difracție.**

Astfel, dacă de exemplu lumina produsă de un bec trece printr-un mic orificiu, ea nu va produce pe ecran o simplă pată luminoasă de forma orificiului ci (vezi figura 4.33) o imagine de difracție cu franje alternativ luminoase și întunecoase.

Descriind acest fenomen, distingem două cazuri particulare de difracție:

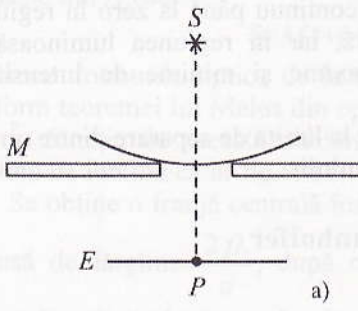
1. difracția în lumină divergentă sau difracție de tip Fresnel și
2. difracția în lumină paralelă sau de tip Fraunhoffer.

4.3.1. Difracția Fresnel

Difracția Fresnel se realizează în cazul când sursa luminoasă și ecranul (sau numai ecranul) se găsesc la distanță finită de obstacolul pe care se face difracția. Prin difracție Fresnel se obține pe ecran imaginea de difracție a obstacolului.

4.3.1.1. Difracția produsă de o deschidere circulară practicată într-un paravan opac

Fie S sursa punctiformă de lumină și MN paravanul prevăzut cu un orificiu circular de diametru aproximativ egal cu lungimea de undă a luminii ($d \simeq \lambda$) (fig. 4.34, a).



a)

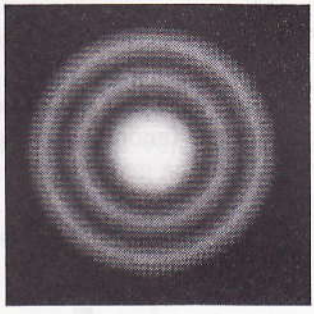

b)

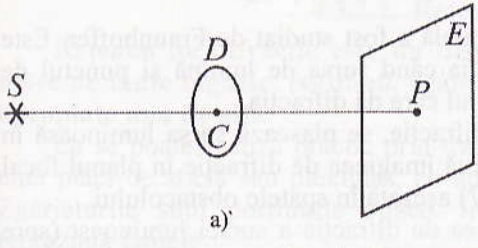
Fig. 4.34. a) Difracția printr-un orificiu circular; b) franjele difracției în cazul deschiderii circulare

Franjele de difracție obținute pe ecranul E vor fi și ele circulare.

Punctul P este luminos sau întunecos și are în jurul său inele circulare luminoase și întunecate alternativ (fig. 4.34, b).

4.3.1.2. Difracția pe un disc circular opac

Independent de dimensiunile și poziția micului obstacol opac (fig. 4.35, a), în centrul umbrei lui geometrice va fi totdeauna lumină. Punctul central luminos este înconjurat de un sistem de inele alternativ luminoase și întunecoase (fig. 4.35, b).



a)

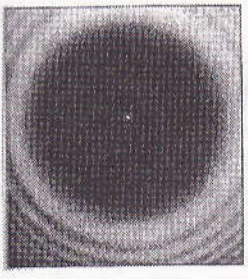

b)

Fig. 4.35. a) Difracția pe un disc circular opac; S – sursă; D – disc opac cu centrul în C; E – ecran; P – punct pe axa SC; b) – franje de difracție pentru un disc circular. În centrul imaginii este lumină

4.3.1.3. Difracție la marginea rectilinie a unui semiplan opac

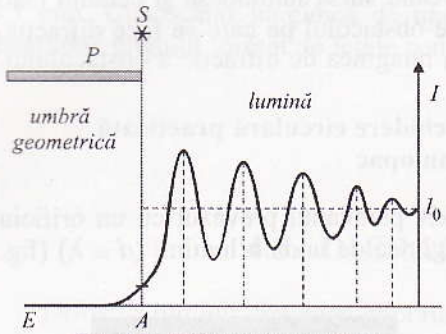


Fig. 4.36. Difracția la marginea unui paravan

Așezând un paravan opac P (fig. 4.36) între sursa de către lumină S și ecranul E, distribuția intensității luminoase I pe ecran este cea din figură, unde I_0 este intensitatea luminii în punctul A în absența semiplanului opac P. Franjele de difracție se îndesesc pe măsura depărtării de franja centrală.

Observăm că în prezența semiplanului opac intensitatea în A este doar 0,25 I_0, scăzând continuu până la zero în regiunea de umbră, iar în regiunea luminoasă se obțin maxime și minime de intensitate, primele maxime depășind valoarea I_0.

Cauza acestor fenomene complexe care apar la limita de separare dintre umbra geometrică și lumina geometrică este difracția luminii.

4.3.2. Difracția Fraunhoffer

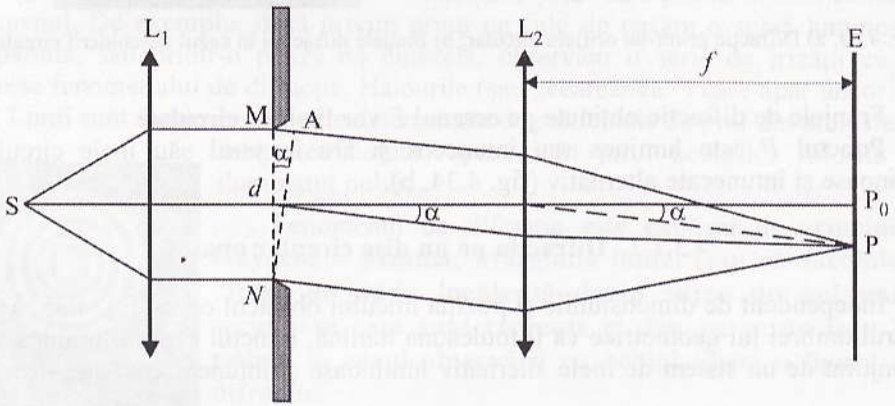


Fig. 4.37. Difracția în lumină paralelă pe o fantă dreptunghiulară

Fenomenul de difracție în lumină paralelă a fost studiat de Fraunhoffer. Este vorba de difracția undelor plane, în situația când sursa de lumină și punctul de observație sunt infinit depărtate de obstacolul care dă difracția.

Pentru a realiza practic acest tip de difracție, se plasează sursa luminoasă în focarul unei lentile convergente și se observă imaginea de difracție în planul focal al unei a doua lentile convergente (fig. 4.37) așezată în spatele obstacolului.

Figura de difracție reprezintă imaginea de difracție a sursei luminoase (spre deosebire de difracția Fresnel, când se obținea imaginea de difracție a obstacolului).

4.3.2.1. Difracția pe o fantă dreptunghiulară

Prin întrebuințarea lentilei convergente L_1 (fig. 4.37), fasciculul de lumină provenit de la sursa S este transformat în fascicul paralel. Considerăm cazul în care acest fascicul este perpendicular pe fanta MN, dreptunghiulară și îngustă.

Suprafața de undă plană MN de lățime d devine, conform principiului Huygens – Fresnel, sediul izvoarelor secundare care emit unde elementare coerente și în fază ce vor interfera, dând pe ecranul E o imagine de difracție.

Razele paralele între ele care fac un unghi α oarecare cu axa optică principală vor fi adunate de lentila L_2 în punctul P din planul ei focal (care coincide cu ecranul E).

Diferența de drum între raza marginală care pornește din M și raza care pornește din N este

$$\delta = MA + (AP) - (NP) = MA = d \sin \alpha$$

deoarece drumurile optice de la frontul AN până la P prin lentila L_2 sunt egale conform teoremei lui Malus din optica geometrică.

În funcție de această diferență de drum, pe ecran se vor obține maxime și minime de lumină ca în fig. 4.38.

Se obține o franjă centrală foarte intensă de lărgime $\frac{2f\lambda}{d}$, după care urmează o serie de franje luminoase de lărgime $\frac{f\lambda}{d}$ a căror intensitate scade foarte rapid cu depărtarea de centru, x. Franjele luminoase sunt despărțite prin minime nule.

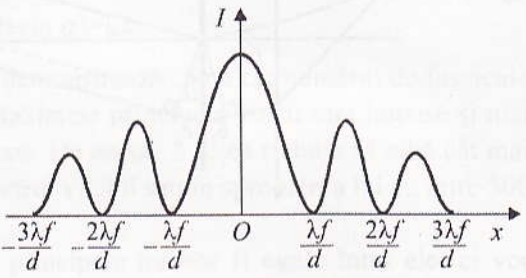


Fig. 4.38. Distribuția intensității luminoase în funcție de distanță la difracția pe o fantă

Franja luminoasă centrală este cu atât mai lată cu cât este mai mare lungimea de undă λ și cu cât este mai mică lățimea fantei d.

Dacă izvorul S este de lumină albă, maximul central va fi alb, iar maximele secundare vor fi colorate, cele cu lungimi de undă mai mică fiind mai apropiate de maximul central.

4.3.2.2. Rețeaua de difracție

Rețeaua de difracție este un dispozitiv optic ce constă dintr-un număr mare de fante înguste, rectilinii, egale între ele, paralele, echidistante și foarte apropiate una de alta.

Ea se poate realiza practic prin trasarea de zgârieturi (trăsături) pe suprafața unei plăci de sticlă sau plexiglas, cu ajutorul unei mașini de divizat cu diamant. Zgârieturile sunt porțiunile opace. Intervalele transparente dintre zgârieturi reprezintă fantele.

Rețeaua de difracție pe o suprafață transparentă este o *rețea prin transmisie*.

Dacă L este lungimea porțiunii striate (fig. 4.39) iar N este numărul de trăsături,

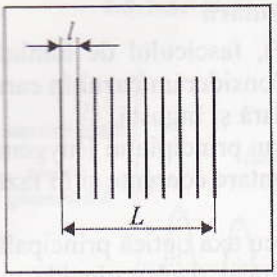


Fig. 4.39. Rețeaua de difracție

atunci rețeaua respectivă va avea un număr $n=\frac{N}{L}$ de trăsături pe unitatea de lungime și o distanță $l=\frac{L}{N}$ între două trăsături succesive, distanță care se numește constanta rețelei.

Un fascicul de lumină monocromatică, provenit de la un izvor S, transformat în fascicul paralel de către lentila L_1, cade sub un unghi de incidență i pe rețeaua R. Figura de difracție se vede în planul focal al lentilei L_2, pe ecranul E (fig. 4.40).

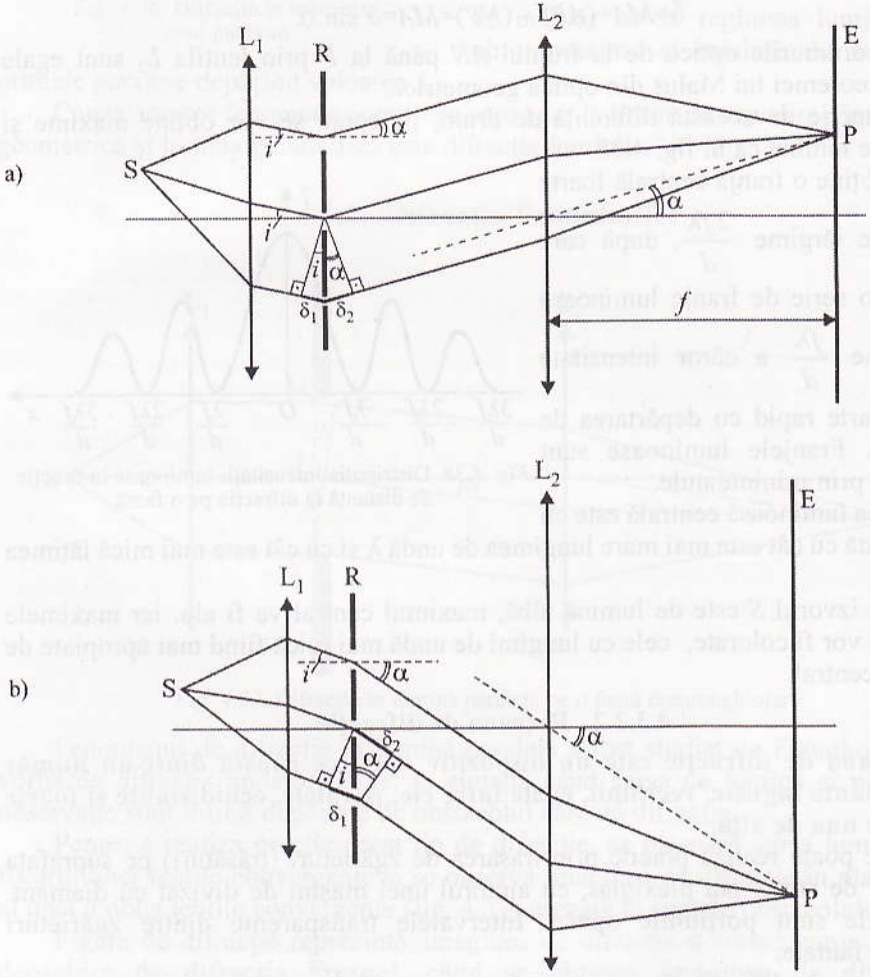


Fig. 4.40. Obținerea experimentală a difracției pe rețea

Potrivit principiului Huyges – Fresnel fiecare fantă a rețelei devine sediul unor noi unde secundare, pentru fiecare radiație monocromatică în parte.

Poziția maximelor de difracție se obține ținând seama de faptul că starea de interferență depinde de valoarea diferenței de drum dintre două raze ce provin de la două fante alăturate ale rețelei.

Dacă razele incidente şi difractate sunt de aceeaşi parte a normalei la rețea, diferența de drum dintre două raze difractate pe două fante consecutive este (fig. 4.40, a):

$$\delta=\delta_1+\delta_2=l(\sin i+\sin \alpha).$$

Dacă razele incidente sunt de o parte a normalei, iar cele difractate de cealaltă parte (fig. 4.40, b), diferența de drum este:

$$\delta=\delta_1-\delta_2=l(\sin i-\sin \alpha).$$

În cele două puncte P, simetrice față de maximul central, prin interferența undelor secundare coerente, se vor obține maxime dacă:

$$l(\sin i\pm\sin \alpha)=k\lambda.$$

În teoria interferenței multiple se demonstrează că cu cât numărul de fascicule care interferă este mai mare, cu atât maximele principale vor fi mai intense şi mai subțiri, observabile pe un fond întunecos. De aceea, o rețea trebuie să aibă cât mai multe trăsături. Rețelele folosite în spectrul vizibil sau în apropierea lui au între 500 şi 1.500 trăsături pe milimetru.

Ca efect al difracției, maximele principale nu vor fi egale între ele, ci vor scădea treptat în intensitate cu creşterea ordinului k.

În lumina albă, figura de difracție va conține o franjă centrală albă, pentru că în dreptul acestui maxim $\delta=0$ pentru toate lungimile de undă. Simetric, de ambele părți ale acesteia, se dispun benzi colorate care se lățesc spre exterior şi care conțin culorile spectrale de la violet (în interior) spre roşu (în exterior). Acestea sunt spectrele (continue) de ordinul 1, 2, ... n. La marginile figurii de difracție, spectrele de ordine mai mari se pot suprapune, rezultând „albul de ordin superior".

Rețeaua de difracție este folosită în spectrometrie, pentru a produce descompunerea unui fascicul de lumină în radiațiile monocromatice componente; dacă se cunoaşte constanta rețelei, atunci, prin măsurarea unghiului de deviație corespunzător unei lungimi de undă, se poate calcula valoarea acelei lungimi de undă. În cazul unei prisme acest lucru nu este posibil, deoarece unghiurile de deviație nu sunt legate printr-o relație simplă de lungimile de undă, ci depind de caracteristicile materialului din care este confecționată prisma.

ACTIVITATE EXPERIMENTALĂ

Rețeaua de difracție

Tema

Determinarea lungimii de undă cu ajutorul rețelei optice

Materiale necesare

Folosim bancul optic din trusa de fizică pentru liceu, pe care montăm, în ordine: sursa de lumină (bec), filtru optic pentru selectarea unei radiații monocromatice, suportul de fantă cu fanta simplă, lentila convergentă cu f=+120 mm, rețeaua de difracție și ecranul divizat.

Modul de lucru

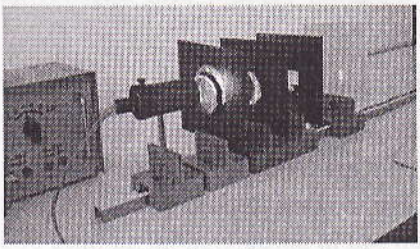


Fig. 4.41. Montaj experimental pentru studiul rețelei de difracție

La incidență normală i=0, iar condiția de maxim de difracție devine:

$$l \sin \alpha = k\lambda.$$

Dacă x este distanța între maximul central P_0 și maximul de ordin k (P_k), din fig. 4.42 observăm că:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{f}.$$

În cazul unghiurilor de difracție mici, ținând seama că $\operatorname{tg}\alpha \cong \sin\alpha$ și $n = \frac{1}{l}$, punctul P_k în care se va forma maximul de ordin k se va afla la distanța:

$$x = f \operatorname{tg}\alpha \simeq f \sin\alpha = fk\lambda n$$

adică

$$\lambda = \frac{x}{kfn}.$$

Determinând experimental distanța x, cunoscând distanța focală f a lentilei folosite și numărul n de trăsături pe unitatea de lungime a rețelei, se calculează λ. Datele experimentale se trec într-un tabel conform modelului de mai jos.

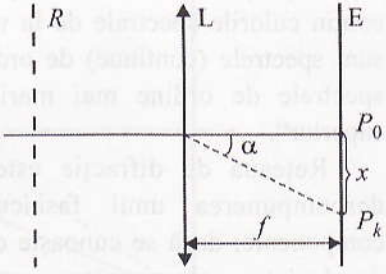


Fig. 4.42. Determinarea λ

$f(m)$	$n\left(\frac{\text{trăs}}{\text{m}}\right)$	$x(m)$	k	$\lambda(nm)$	$\overline{\lambda}(nm)$

4.3.3. Aplicații în știință și tehnică ale difracției luminii

4.3.3.1. Puterea separatoare și difracția luminii

Faptul că lumina de la o sursă punctiformă, difractată de o deschidere circulară, este focalizată de o lentilă nu ca un punct geometric, ci ca un disc de rază finită, înconjurat de inele întunecoase și luminoase, este un important rezultat experimental.

Într-un sistem optic, datorită diafragmelor indispensabile oricărui instrument optic, imaginile vor fi influențate de fenomenul de difracție a luminii. Așadar în locul unde ar trebui să se formeze imaginea punctiformă, se formează o figură de difracție și anume o mică pată circulară luminoasă, înconjurată de cercuri luminoase și întunecoase de intensități din ce în ce mai mici.

Se spune că un sistem optic este capabil să distingă două surse punctiforme (două puncte alăturate ale aceluiași obiect), dacă figurile de difracție corespunzătoare acestora sunt suficient de mici sau suficient de distanțate pentru a fi percepute separat. Mărimea ce caracterizează capacitatea unui sistem de a distinge două asemenea puncte se numește putere separatoare sau rezoluție.

Un instrument optic va avea o putere separatoare cu atât mai mare cu cât va putea distinge puncte mai apropiate între ele (sau care se văd sub unghiuri α mai mici).

Se demonstrează că puterea separatoare unghiulară P crește dacă:

– deschiderea (apertura) lentilei-obiectiv d este mai mare (de aceea lunetele se construiesc cu diametru mare ale lentilei, iar telescoapele cu oglindă – cu diametru mare al oglinzii); în fig. 4.43 putem vedea efectul micșorării aperturii obiectivului asupra puterii separatoare atunci când se observă două mici surse luminoase apropiate.

– lungimea de undă λ a radiației utilizate este mai mică.

Așadar

$$P \sim \frac{d}{\lambda}.$$

Iată de ce, cu ajutorul microscopului, se pot identifica cel mult obiecte ale căror dimensiuni sunt de ordinul de mărime al lungimii de undă a luminii folosite.

O îmbunătățire se poate realiza numai cu „lumină" de lungimi de undă mai scurte. Pe aceasta se bazează performanțele deosebite ale microscopului electronic.

Proprietățile ondulatorii ale luminii impun puterii de rezoluție a tuturor instrumentelor optice o limită naturală care în principiu nu se poate depăși.

Fig. 4.43. Imaginea a două surse punctiforme. Sus: apertură largă, sursele se disting clar. Jos: apertură mică, sursele se confundă

4.3.3.2. Holografia

Holografia este o metodă de înregistrare şi apoi de reconstituire a imaginilor optice ale obiectelor, bazată pe difracţia fasciculelor de lumină coerentă. A fost inventată în 1948 de către Denis Gabor care a primit premiul Nobel în 1971.

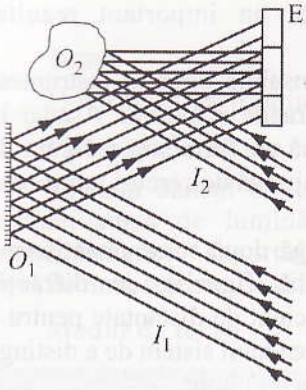


Fig. 4.44. Principiul obţinerii hologramei

Principiul holografiei constă în utilizarea a două fascicule de lumină coerente, unul reflectat pe oglinda plană O_1, iar celălalt difractat pe conturul obiectului O_2 (fig. 4.44), care prin suprapunere interferă, producând franje de interferenţă. Aceste franje sunt înregistrate pe placa fotografică E, obţinându-se astfel o hologramă. Holograma este deci o complicată imagine de interferenţă, care va deţine o mare cantitate de informaţie despre obiect, pentru că ea va conţine informaţii atât despre variaţiile de fază, cât şi despre variaţiile intensităţii undelor de lumină difractate de către obiect.

De aceea, holografia reprezintă o metodă de înregistrare completă a informaţiei pe care o poartă radiaţia care s-a reflectat pe obiect (holos = întreg, graphos = înregistrare).

Spre deosebire de fotografia obişnuită, care ne dă informaţii numai asupra variaţiilor intensităţii undelor luminoase reflectate de către obiect, holograma conţine şi informaţii asupra fazelor acestor unde.

Toate aceste informaţii pot fi valorificate prin reconstituirea imaginii obiectului cu ajutorul hologramei. În acest scop, holograma se expune în calea unui fascicul paralel de radiaţii monocromatice (raze laser) care se va difracta pe imaginea de interferenţă înregistrată în hologramă şi va reconstitui în relief imaginea obiectului.

Între avantajele holografiei menţionăm:

– nu este nevoie de obiectiv fotografic;

– chiar dacă holograma este spartă în bucăţi, fiecare parte va reda în întregime imaginea obiectivului; va suferi doar claritatea, nu şi integritatea imaginii;

– permite înregistrarea fidelă şi în cazul când punctele obiectului au străluciri foarte diferite (10000:1 faţă de 100:1 la plăcile fotografice obişnuite).

Aplicaţii:

– stocarea holografică a informaţiei;

– holografia interferenţială: de exemplu, unul dintre fasciculele de lumină este trecut printr-o hologramă înregistrată pentru un corp nedeformat, iar la doilea prin holograma corespunzătoare corpului deformat. Astfel se vor obţine imagini de interferenţă în care se vizualizează tensiunile apărute în corpul supus la solicitări mecanice. Prin această tehnică pot fi studiate mişcările de vibraţie ale corpurilor, turbulenţa fluidelor precum şi o serie de alte procese rapide;

– televiziunea şi cinematografia holografică;

– microscopia holografică (măriri de 500.000.000 X);

– tehnologiile microelectronicii etc.

Probleme rezolvate

1. Pe o rețea cu n=100 tras/mm cade la incidență normală un fascicul de lumină monocromatică. Știind că unghiul dintre maximul de ordin 2 și cel de ordin 1 este de 3°30′, calculați lungimea de undă a radiației folosite.

Rezolvare

Pentru unghiuri mici, $\sin\alpha \simeq \alpha$ iar pentru cele 2 maxime de difracție avem:

$$\left.\begin{array}{l} l\alpha_1 = k_1\lambda \\ l\alpha_2 = k_2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow l(\alpha_2-\alpha_1) = \lambda(k_2-k_1) \left.\begin{array}{r} \\ l=\dfrac{1}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{l(\alpha_2-\alpha_1)}{2-1} = \frac{\alpha_2-\alpha_1}{n}.$$

Cum $\alpha_2-\alpha_1=3°30'$, transformăm în radiani:

$$\begin{array}{l} 180° \ldots\ldots\ldots\ldots \pi \text{ rad} \\ \underline{3{,}5° \ldots\ldots\ldots\ldots \varphi} \end{array}$$

$$\varphi = \frac{3{,}5\cdot\pi}{180}.$$

Deci

$$\lambda = \frac{3{,}5\cdot 3{,}14}{180\cdot 10^5} = 6{,}10\cdot 10^{-7}\,\text{m} = 610\,\text{nm},$$

deoarece

$$n = 100\frac{\text{trăs}}{\text{mm}} = 100\frac{\text{trăs}}{10^{-3}\,\text{m}} = 10^5\frac{\text{trăs}}{\text{m}}.$$

2. Un fascicul paralel de lumină monocromatică cade normal pe o rețea de difracție cu constanta l=1,2 μm. Figura de difracție se observă pe un ecran plasat în planul focal al unei lentile convergente cu f=0,05 m. Aflați:

a) lungimea de undă a luminii folosite dacă maximul de difracție de ordinul întâi se formează sub unghiul de 30°;

b) distanța pe ecran între maximul de ordin trei și cel de ordin zero;

c) lățimea spectrului de ordinul doi dacă iluminăm rețeaua normal cu lumină albă iar unghiurile de difracție sunt mici.

Rezolvare

a) $l\sin\alpha = k\lambda \Rightarrow \lambda = l\sin\alpha = 600$ nm;

b) $x_3 = 3f\lambda n = 7{,}5$ cm;

c) $\Delta x = kf\dfrac{\lambda_{max}-\lambda_{min}}{l} = 2f\dfrac{\lambda_{max}-\lambda_{min}}{l}$

$\lambda_{min} = 380\ nm$

$\lambda_{min} = 760\ nm$

$\Rightarrow \Delta x = 3{,}16\ cm.$

3. O rețea de difracție plană cu constanta $l=10^{-6}$ m este iluminată sub un unghi de incidență $i=30°$ cu o radiație monocromatică cu lungimea de undă $\lambda=500$ nm. Care este numărul total al maximelor care se pot forma?

Rezolvare

Numărul total de maxime de difracție este egal cu $k_{1max}+k_{2max}+1$, unde k_{1max} și k_{2max} sunt ordinele maxime de difracție pentru maximele formate de o parte și de alta a maximului central (obținute pentru $\sin\alpha=1$). Lor li se adaugă 1 pentru maximul central. Astfel:

$$k_{1max} = \frac{l(1+\sin i)}{\lambda} = \left[\frac{10^{-6}\cdot\frac{3}{2}}{5\cdot10^{-7}}\right] = 3$$

$$k_{2max} = \frac{l(1-\sin i)}{\lambda} = \left[\frac{10^{-6}\cdot\frac{1}{2}}{5\cdot10^{-7}}\right] = 1.$$

Rezultă:

$$N_{max}=3+1+1=5.$$

Test

1. A F Centrul imaginii de difracție a unui mic obstacol opac este întotdeauna luminos.
2. A F Centrul imaginii de difracție a unei deschideri circulare este întotdeauna întunecat.
3. A F Difracția Fresnel se realizează în lumină paralelă.
4. A F La marginea unui paravan opac, primul maxim luminos este mai intens decât ceea ce s-ar obține în absența paravanului.
5. A F Fresnel a completat principiul lui Huygens adăugând că undele secundare sunt coerente și interferă.
6. A F Difracția Fraunhoffer se obține când sursa se găsește la distanță finită de obstacolul pe care se face difracția în lumină divergentă.

7. A F La difracția pe o fantă toate maximele sunt la fel de late.
8. A F Rețeaua pe o suprafață opacă este o rețea prin transmisie.
9. A F Maximele principale sunt la fel de luminoase între ele la o rețea de difracție.
10. A F Cu cât o rețea are mai multe trăsături, cu atât maximele vor fi mai intense și mai nete.
11. A F Spre deosebire de prismă, rețeaua deviază cel mai puțin violetul iar roșul cel mai mult.
12. A F Rețeaua de defracție este piesa principală a spectrografelor cu rețea.
13. A F La difracția Fresnel, figura de difracție reprezintă imaginea obstacolului.
14. A F La difracția Fraunhoffer, figura de difracție reprezintă imaginea sursei luminoase.
15. A F Puterea separatoare crește dacă folosim lumină cu lungimi de undă mai mari.
16. A F O lentilă-obiectiv mai mare în diametru asigură unui instrument optic o putere separatoare mai bună.

Probleme propuse

1. O rețea optică este folosită la incidență normală. În spectrul de ordinul 2, radiația cu lungimea de undă de 500 nm este deviată de un unghi = 30°. Câte trăsături pe milimetru are rețeaua, și care este constanta acestei rețele?

R: 500 tr/mm; $l = 2 \cdot 10^{-6}$ m.

2. O rețea, iluminată la incidență normală, are 200 trăsături/mm. Se observă, în planul focal al unei lentile convergente cu distanța focală de 1 m, spectrul de ordinul 2 dat de o sursă de lumină albă. Determinați distanța dintre radiațiile cu lungimile de undă de 656,3 nm și 410,2 nm.

R: 9,84 cm

3. O rețea de difracție este iluminată cu lumină monocromatică cu lungimea de undă 620 nm. Lumina care iese din rețea cade pe o lentilă cu distanța focală de 30 cm. Distanța care separă spectrele de ordinul 2 este de 15,4 cm. Determinați constanta rețelei.

R: l = 4,83 μm

4. Un fascicul paralel de lumină monocromatică întâlnește, la incidență normală, o rețea de difracție având constanta $l = 1{,}2\mu$ m. Calculați lungimea de undă a luminii folosite dacă maximul de difracție de ordinul întâi se formează sub unghiul de 30°.

R: = 600 nm

5. O rețea plană de difracție cu 400 trăsături/mm este iluminată la incidență normală cu radiație monocromatică cu = 500 nm. Aflați: a) unghiurile de difracție

sub care se observă maximele de ordin 0, 1 şi 2; b) ordinul cel mai înalt care se poate observa cu această reţea.

R: a) $\alpha = \arcsin(k\lambda n)$; $\alpha_0 = 0$; $\alpha_1 = 11{,}5^0$, $\alpha_2 = 23{,}6^0$; b) $k_{max} = \left[\frac{1}{\lambda n}\right] = 5$

6. În spectrul de ordinul întâi obţinut cu o reţea de difracţie, radiaţia verde ($\lambda = 550$ nm) se observă pentru $\sin\alpha = 0{,}33$. Calculaţi numărul de zgârieturi pe 1 mm al reţelei.

R: $n = \frac{\sin\alpha}{\lambda} = 600 \frac{\text{trăsături}}{\text{mm}}$

7. O reţea plană de difracţie are 9000 trăsături pe o lăţime L = 3 cm şi este iluminată cu radiaţie monocromatică la incidenţă normală. Imaginea de difracţie se proiectează pe un ecran aşezat în planul focal al unei lentile convergente cu distanţa focală $f = 0{,}1$ m. Distanţa dintre maximele de ordinul întâi pe ecran este $\Delta x_1 = 3{,}6$ cm. Unghiurile de difracţie sunt mici (sub 5°). Calculaţi: a) lungimea de undă a luminii folosite; b) lăţimea spectrului de ordinul întâi dacă se foloseşte lumină albă, pentru care se consideră $\lambda \in [400\text{ nm}, 760\text{ nm}]$.

R: a) $n = \frac{N}{L} = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{trăsături}}{\text{m}}$, $\lambda = \frac{\Delta x_1}{2fn} = 600$ nm;

b) $\Delta x = (\lambda_{max} - \lambda_{min})fn = 1{,}08$ cm

8. Aflaţi: a) ordinul maxim al spectrului luminii galbene a sodiului ($\lambda = 589$ nm) obţinut la incidenţă normală cu o reţea a cărei constantă este $l = 2 \cdot 10^{-6}$ m; b) câte maxime se vor forma în total pe ecran?

R: a) $k_{max} = \left[\frac{l}{\lambda}\right] = 3$; b) $N = 2k_{max} + 1 = 7$

9. O reţea de difracţie are constanta $l = 4 \cdot 10^{-6}$ m. Pe reţea cade normal o radiaţie monocromatică iar după reţea urmează o lentilă convergentă cu distanţa focală $f = 0{,}4$ m ce proiectează figura de difracţie pe un ecran aşezat în planul focal. Primul maxim de difracţie se află la distanţa $x = 5$ cm de axa centrală. Aflaţi a) lungimea de undă a radiaţiei; b) câte maxime se formează de o parte a maximului central?

R: a) $\lambda = \frac{lx}{kf} = 500$ nm; b) $k_{max} = \left[\frac{l}{\lambda}\right] = 8$

10. Pe o reţea cu constanta $l = 12$ μm cade la incidenţă normală un fascicul de lumină monocromatică. Ştiind că unghiul dintre maximul de ordinul doi şi cel de ordinul trei este 2°30′, calculaţi lungimea de undă a radiaţiei folosite.

R: $\lambda = \frac{l(\alpha_3 - \alpha_2)}{k_3 - k_2} = 522$ nm

11. Să se determine lungimea de undă a unei radiaţii ştiind că, în spectrul de difracţie de ordinul trei dat de o reţea, linia spectrală respectivă coincide cu cea pentru $\lambda = 471$ nm din spectrul de ordinul al patrulea dat de aceeaşi reţea.

R: 628 nm

12. Să se determine ordinul cel mai mare al spectrului de difracţie pe care îl poate da o reţea cu 500 trăsături/mm dacă lungimea de undă a luminii cu care se iluminează reţeaua este 590 nm. Se consideră cazurile: a) incidenţă normală; b) incidenţă sub un unghi de 30°.

R: a) $k_{max} = 3$; b) $k_{max} = 5$

13. Pe o reţea cu constanta $l = 12$ μm cade normal un fascicul luminos monocromatic. Unghiul dintre maximele de ordinul 1 şi 2 este $2^{0}18'$. Să se determine lungimea de undă a luminii incidente.

R: $\lambda = 481{,}5$ nm

4.4. POLARIZAREA LUMINII

4.4.1. Lumină polarizată. Lumină naturală. Grad de polarizare

Polarizarea este un fenomen ce ţine de caracterul ondulatoriu al luminii şi are legătură cu transversalitatea undelor electromagnetice. De exemplu, undele sonore, care sunt unde longitudinale, nu pot fi polarizate. Lumina, însă, este o undă electromagnetică transversală; direcţia de propagare a vectorului luminos $\vec{E}$ este în permanenţă perpendiculară pe direcţia de oscilaţie. El este în acelaşi timp perpendicular în orice moment pe vectorul inducţiei magnetice $\vec{B}$ cu care oscilează în fază. Întrucât s-a stabilit că acţiunea luminii se datoreşte oscilaţiilor vectorului intensitate a câmpului electric $\vec{E}$ şi pentru a evita confuzia, în figura 4.45 este indicată doar oscilaţia acestui vector (fig. 4.45).

O undă luminoasă se numeşte „polarizată liniar" dacă, în orice punct de pe direcţia de propagare, vectorul electric $\vec{E}$ oscilează după o singură direcţie. Undele de acest tip se mai numesc şi „plan polarizate" sau, pur şi simplu, „polarizate". Figura 4.45 reprezintă, deci, oscilaţia vectorului luminos $\vec{E}$ într-o undă polarizată liniar.

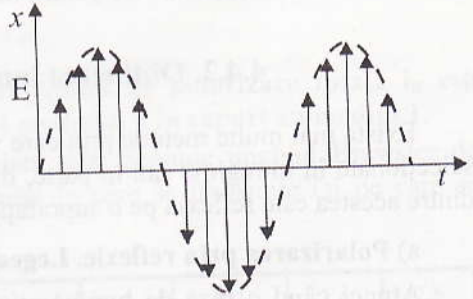


Fig. 4.45.

Lumina naturală, provenită de la o sursă obişnuită, nu este polarizată; ea provine de la moleculele din care este compusă sursa luminoasă. Particulele încărcate electric din molecule câştigă energie într-un fel oarecare şi radiază această energie sub formă de unde electromagnetice; undele emise de fiecare moleculă pot fi liniar polarizate, însă întrucât orice sursă de lumină conţine un număr uriaş de molecule, cu orientări întâmplătoare, lumina emisă este un amestec aleatoriu de unde liniar polarizate în toate direcţiile transversale posibile.

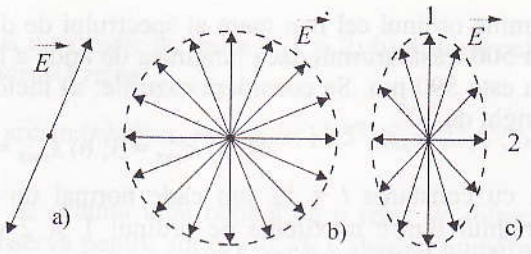


Fig. 4.46. a) lumină total polarizată; b) lumină naturală; c) lumină parțial polarizată

Fie planul diagramei din figura 4.46 un front de undă al unui fascicul luminos care se propagă către cititor. Lumina liniar polarizată este reprezentată schematic prin săgeata dublă, care arată că oscilațiile câmpului electric au loc numai după o anumită direcție (fig. 4.46, *a*). Un fascicul de lumină naturală se reprezintă ca în figura 4.46, *b* unde săgețile arată un amestec de unde polarizate liniar în toate direcțiile posibile.

Există de asemenea lumină parțial polarizată (fig. 4.46, *c*) când vectorul luminos $\vec{E}$ oscilează într-o direcție privilegiată (1), constantă în timp, dar nu unică, din planul perpendicular pe direcția de propagare.

Însemnând cu I_1 și I_2 intensitățile vibrațiilor luminoase după azimutul preferat (1) respectiv după direcția perpendiculară pe acesta (2) (vezi fig. 4.46, *c*), atunci raportul

$$P = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}$$

se numește gradul de polarizare a luminii.

Observăm că: a) $P = 1$ pentru lumina liniar polarizată (pentru că $I_2 = 0$);
b) $P = 0$ pentru lumina naturală (pentru că $I_1 = I_2$);
c) $0 < P < 1$ pentru lumina parțial polarizată.

4.4.2. Obținerea luminii polarizate liniar

Există mai multe metode prin care vibrațiile într-o direcție particulară pot fi selecționate în întregime sau în parte, dintr-un fascicul de lumină naturală. Una dintre acestea este reflexia pe o suprafață dielectrică.

a) Polarizarea prin reflexie. Legea lui Brewster

Atunci când o rază de lumină atinge suprafața de separare a două medii transparente dielectrice, cea mai mare parte a luminii se refractă, pătrunzând în celălalt mediu. O mică parte, circa 10 ÷ 15% se reflectă pe suprafața de separație. Această rază reflectată este parțial polarizată.

În anul 1812, Sir David Brewster a observat că atunci când raza refractată este perpendiculară pe cea reflectată (situație realizabilă prin alegerea unui unghi de incidență convenabil), lumina reflectată este total polarizată (fig. 4.47).

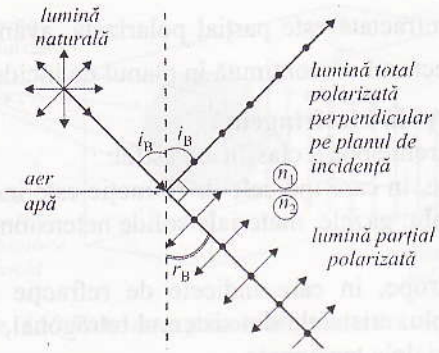


Fig. 4.47. Polarizarea totală prin reflexie la incidență brewsteriană

Întrucât

$$i_B + r_B = \frac{\pi}{2}$$

rezultă

$$r_B = \frac{\pi}{2} - i_B$$

adică

$$\sin r_B = \cos i_B.$$

Din legea refracției:

$$\frac{\sin i_B}{\sin r_B} = \frac{n_2}{n_1}$$

Obținem:

$$\frac{\sin i_B}{\cos i_B} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

Așadar

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21}.$$

Legea lui Brewster: tangenta unghiului de polarizare totală i_B este egală cu indicele de refracție relativ al mediului 2 în raport cu mediul 1.

Dacă mediul incident este aerul, iată cum depinde unghiul Brewster de valoarea indicelui de refracție al mediului în care se transmite (și pe care se reflectă) lumina:

n	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	2,2	2,4	2,6
i_B	56°19′	58°00′	59°32′	60°57′	62°14′	63°26′	65°33′	67°23′	68°58′

Așa cum se vede în fig. 4.47, în lumina polarizată liniar obținută prin reflexie, oscilațiile vectorului luminos $\vec{E}$ se execută perpendicular pe planul de

incidenţă. Lumina refractată este parţial polarizată, având direcţia preferenţială de vibraţie pentru vectorul $\vec{E}$ conţinută în planul de incidenţă.

b) **Polarizarea prin birefringenţă**

Mediile transparente pot fi clasificate astfel:

– medii izotrope, în care indicele de refracţie este independent de planul de polarizare, de exemplu: gazele, materiale solide netensionate, lichidele, cristalele din sistemul cubic;

– medii anizotrope, în care indicele de refracţie depinde de planul de polarizare, de exemplu: cristalele din sistemul tetragonal, hexagonal, ortorombic etc., precum şi materialele tensionate.

În general, un fascicul de raze de lumină care trece printr-un cristal anizotrop este refractat după două direcţii, prezentând fenomenul de birefringenţă. Fasciculul incident se împarte în două fascicule emergente, fiecare fascicul fiind liniar polarizat sub un unghi de 90° unul faţă de altul.

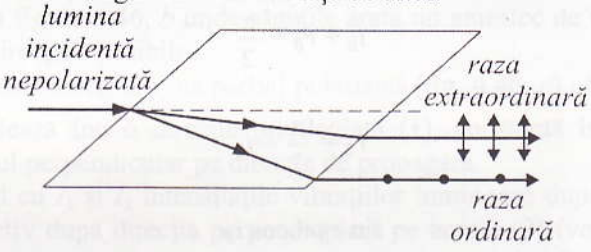


Fig. 4.48. Dubla refracţie a luminii în cristalul de spat de Islanda. Cele două raze (ordinară şi extraordinară) sunt liniar polarizate, dar direcţiile de oscilaţie ale vectorilor luminoşi sunt reciproc perpendiculare

În figura 4.48 este prezentată dubla refracţie a luminii în cristalul de spat de Islanda. Raza care se supune legii de refracţie a lui Snell şi Descartes se numeşte „raza ordinară"; cealaltă rază emergentă nu satisface această lege şi se numeşte „raza extraordinară".

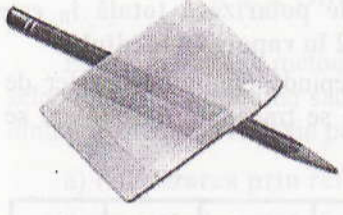


Fig. 4.49.

Fenomenul de birefringenţă naturală a fost descoperit în 1669 de către Bartholinus care a observat, privind printr-un cristal de spat de Islanda, dedublarea imaginii (fig. 4.49). Birefringenţa naturală este folosită la construirea prismelor „polarizante" (Nicol, Rochon, Wollaston etc.), care transformă lumina naturală în lumină liniar polarizată.

c) **Polarizarea prin absorbţie selectivă. Polaroizi**

Unele cristale birefringente (de ex. turmalina) şi polaroizii sintetici prezintă fenomenul de absorbţie selectivă, adică una din componentele polarizate este absorbită mult mai mult decât cealaltă. Deci, dacă un cristal este tăiat la grosimea potrivită, una dintre componente este practic stinsă prin absorbţie, pe când cealaltă este transmisă în cantitate apreciabilă (fig. 4.50).

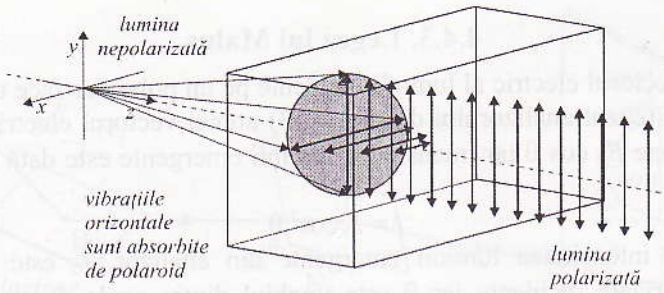


Fig. 4.50. Polarizarea prin absorbție selectivă

Un polaroid este format, în principiu, prin înglobarea unor microcristale într-o masă plastică transparentă. Aceste microcristale sunt orientate fie prin acțiunea unui câmp electric sau magnetic, fie printr-un proces mecanic de laminare, în așa fel ca axele cristalografice să fie paralele între ele. Astfel de cristale pot fi de exemplu cristale de herapatită (iodusulfat de chinină).

Polaroizii au eficacitate maximă în mijlocul spectrului vizibil iar spre regiunile extreme ale spectrului sunt mai puțin eficace. Dezavantajul polaroizilor constă într-o transparență mai mică în comparație cu prismele polarizante. Dar acest dezavantaj este compensat într-o serie de probleme practice prin posibilitatea de a obține dispozitive de polarizare ieftine, care permit folosirea de fascicule largi și care au o suprafață mare (metri pătrați).

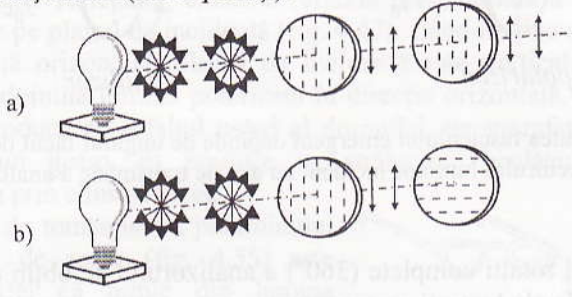


Fig. 4.51. Folosirea polaroizilor. a) Când axele de transmisie sunt paralele, lumina trece (fiind polarizată liniar); b) când axele sunt perpendiculare, obținem extincția luminii

Dacă așezăm două astfel de filtre polarizante unul după altul astfel încât axele lor să fie paralele, un fascicul monocromatic care îl traversează pe primul îl va traversa și pe al doilea (fig. 4.51, *a*).

Dar dacă rotim ușor al doilea filtru până ce axa lui face un unghi de 90° cu axa primului („polarizori încrucișați") vom vedea intensitatea fasciculului diminuându-se treptat până la extincție (fig. 4.51, *b*).

În fig. 4.52 putem vedea efectul așezării a doi polaroizi astfel încât axele lor de transmisie să fie perpendiculare: lumina nu mai trece deloc.

Fig. 4.52. Polarizorii încrucișați opresc trecerea luminii

4.4.3. Legea lui Malus

Când vectorul electric al luminii incidente pe un polarizor face unghiul θ cu axa acestuia (cazul analizorului din fig. 4.53) atunci vectorul electric al luminii emergente este $E_0 \cos \theta$ iar intensitatea luminii emergente este dată de legea lui Malus:

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

unde I este intensitatea luminii emergente din analizor, I_0 este intensitatea luminii polarizate incidente iar θ este unghiul dintre axele de transmisie ale polarizorului şi respectiv analizorului.

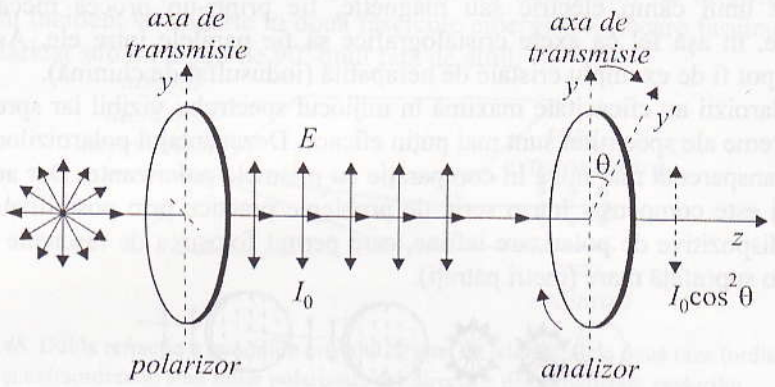


Fig. 4.53. Intensitatea fasciculului emergent depinde de unghiul făcut de direcţia de oscilaţie a vectorului luminos incident cu axa de transmisie a analizorului

În timpul unei rotaţii complete (360°) a analizorului se obţin două maxime şi două minime nule ale luminii emergente.

Un fenomen similar se observă în experimentul lui Malus, efectuat cu lumină polarizată prin reflexie (vezi fig. 4.54). Oglinzile O_1 şi O_2 din sticlă şlefuită au rol de polarizor, respectiv analizor, şi primesc lumină la incidenţă brewsteriană (pentru sticlă $i_B \approx 56°$). Raza CD reflectată de oglinda O_2 face să apară pe ecran un spot D. Rotind oglinda O_2 în jurul direcţiei BC observăm că spotul descrie un cerc având centrul în O (O este punctul de intersecţie al axei BC cu ecranul). Luminozitatea variază periodic. Când planele de incidenţă ABN_1 şi BCN_2 coincid, se obţine luminozitate maximă; când planele de incidenţă sunt perpendiculare, se obţine minimum de luminozitate. În timpul unei rotaţii complete a analizorului în jurul axei BC, spotul D de pe ecran va trece de două ori printr-un maxim şi de două ori printr-un minim.

Ochiul este incapabil să distingă lumina polarizată de lumina nepolarizată. Pentru a observa fenomenul de polarizare este întotdeauna nevoie de un analizor.

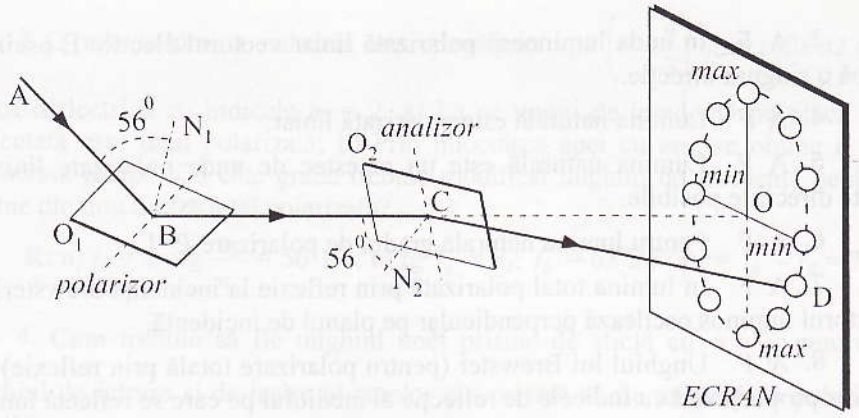


Fig. 4.54. Experimentul lui Malus. Rotirea analizorului duce la modificarea intensității luminoase a fasciculului transmis

4.4.4. Aplicații

Filtrele polarizante (polaroizi) sunt folosite pe scară largă la ochelarii de soare unde joacă rolul analizorului. Am văzut că, atunci când lumina nepolarizată este reflectată, există o reflexie preferențială a luminii polarizate perpendicular pe planul de incidență (fig. 4.47). Când lumina soarelui se reflectă pe o suprafață orizontală, planul de incidență este vertical. Deci, în lumina reflectată predomină lumina polarizată în direcție orizontală. Când o asemenea reflexie se produce pe asfaltul neted al drumului, pe suprafața unui lac, a unei fațade, a unui geam, ea produce o „strălucire" neplăcută și vederea se îmbunătățește prin eliminarea ei.

Direcția de transmisie a polaroidului din ochelarii de soare (fig. 4.55) este verticală, astfel că nimic din lumina polarizată liniar nu este transmisă ochilor.

Filtrele polarizante se folosesc de asemenea la parbrizele mașinilor, la hublourile avioanelor și vapoarelor și în tehnica fotografică.

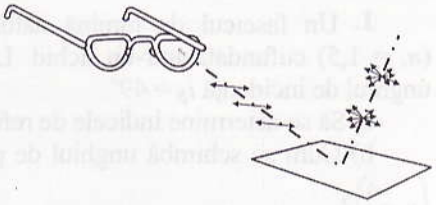


Fig. 4.55. Filtrul polarizant al ochelarilor elimină strălucirea neplăcută a luminii reflectate sub anumite unghiuri

Test

Citiți afirmațiile următoare. Alegeți A dacă afirmația este adevărată sau F dacă afirmația este falsă.

1. A F Numai undele longitudinale pot fi polarizate.

2. A F Polarizarea luminii are legătură cu transversalitatea undelor electromagnetice.

3. A F În unda luminoasă polarizată liniar vectorul electric E oscilează după o singură direcție.

4. A F Lumina naturală este polarizată liniar.

5. A F Lumina naturală este un amestec de unde polarizate liniar în toate direcțiile posibile.

6. A F Pentru lumina naturală gradul de polarizare $P=1$.

7. A F În lumina total polarizată prin reflexie la incidență brewsteriană, vectorul luminos oscilează perpendicular pe planul de incidență.

8. A F Unghiul lui Brewster (pentru polarizare totală prin reflexie) este invers proporțional cu indicele de reflecție al mediului pe care se reflectă lumina.

9. A F Fenomenul de birefringență se întâlnește la cristalele izotrope.

10. A F Funcționarea prismelor polarizante se bazează pe fenomenul de birefringență naturală.

11. A F Polaroizii sunt mai transparenți decât prismele polarizante.

12. A F La studiul polarizării prin reflexie este nevoie de o a doua oglindă, analizorul, pentru că ochiul este incapabil să distingă lumina polarizată de lumina nepolarizată.

13. A F Filtrele polarizante îmbunătățesc calitatea imaginii pentru că elimină anumite reflexii supărătoare.

Probleme propuse

1. Un fascicul de lumină naturală cade pe suprafața unei lame de sticlă (n_s = 1,5) cufundată într-un lichid. Lumina reflectată este liniar polarizată pentru unghiul de incidență $i_B = 49^\circ$.

a) Să se determine indicele de refracție n_l al lichidului;

b) Cum se schimbă unghiul de polarizare totală dacă lama se cufundă în apă $\left(n_a = \frac{4}{3}\right)$?

R: a) $n_l = \frac{n_S}{\operatorname{tg} i_B} = 1{,}3$; b) $i_B' = \operatorname{arctg}\frac{n_S}{n_a} \approx 48^\circ$

2. La ce înălțime unghiulară trebuie să se găsească Soarele deasupra orizontului pentru ca lumina reflectată de suprafața apei $\left(n_a = \frac{4}{3}\right)$ să aibă grad de polarizare maxim?

R: $i_B = arctg\frac{1}{n_a} = 53^\circ$.

3. O rază de lumină naturală se propagă prin apă $\left(n_a = \frac{4}{3}\right)$ şi se reflectă pe o placă dielectrică cu indicele $n_2 = 2$. a) La ce unghi de incidenţă pe placă raza reflectată este total polarizată; b) Prin înlocuirea apei cu aer, se obţine o rază polarizată parţial. Cu câte grade trebuie modificat unghiul de incidenţă pentru a obţine din nou o rază total polarizată?

R: a) $i_B = \text{arctg}\,\frac{n_2}{n_1} = 56^\circ 19'$; b) $\text{tg}\, i_B' = n_2$; $i_B' = 63^\circ 26'$; $\Delta i = i_B' - i_B = 7^\circ 07'$

4. Cum trebuie să fie unghiul unei prisme de sticlă cu $n = \frac{3}{2}$ pentru ca unghiul de intrare şi de ieşire al razelor din prismă să fie unghiul de polarizare totală?

Care este unghiul de deviaţie minimă pentru un astfel de unghi refringent al prismei?

R: $A = 66^\circ 40'$; $\delta_m = 46^\circ 40'$

5. Cu ajutorul unei celule fotosensibile, se constată că lumina reflectată de un mediu dielectric, care apoi trece printr-o prismă polarizantă, are un raport între intensitatea maximă transmisă şi intensitatea minimă egal cu doi. Să se calculeze gradul de polarizare.

R: $P = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} = \frac{1}{3} = 33\%$

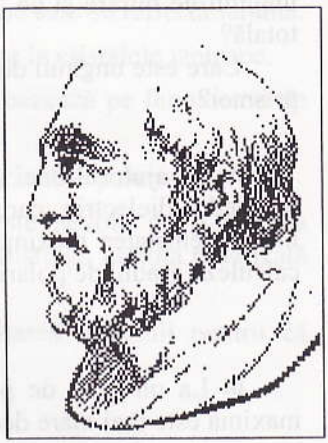
6. La un grad de polarizare de 75% să se arate de câte ori intensitatea maximă este mai mare decât intensitatea minimă.

R: $\frac{I_M}{I_m} = 7$

Capitolul 5

ELEMENTE DE TEORIA HAOSULUI

5.1. INTRODUCERE



Anaxagoras din Clazomene

Paternitatea noțiunii de *haos* îi aparține probabil filozofului grec Anaxagoras (500–428 î.C.) care emite teoria că în univers toate materialele sunt miscibile, haotice cu excepția unuia, de natură spirituală ce asigură ordinea universală, și pe care filozoful l-a numit inteligență.

În vechea greacă, *haos* este antonimul cuvântului *cosmos* care desemnează ordinea, perfecțiunea, predictibilitatea.

A decela ce este ordonat, regulat, normal și ce este haotic, este însă o întreprindere dificilă. Iată spre exemplu, șirul numerelor naturale 1, 2, 3, ... pare a fi ceva ordonat. Cum de asemenea un număr rațional care se exprimă ca raportul a două numere întregi și care scris ca număr zecimal poate avea o perioadă mai scurtă sau mai lungă (de exemplu 1/3=0,3333... iar 2/7=0,285714285714) pare a prezenta și el o anumită regularitate. Un număr irațional însă, adică un număr ce nu poate fi exprimat ca raportul a două numere întregi și la care nu poate fi observată o anumită regularitate a succesiunii cifrelor zecimale (de exemplu $\sqrt{3}$ =1,73205080756887...) pare a fi ceva neregulat. Situația este mai complicată în cazul așa numitelor *numere transcendente* (acele numere ce nu sunt soluții ale unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi și număr finit de termeni, de exemplu: π=3,14159265358979323846... sau e=2,7182818284590452...). Totuși nu trebuie să ne hazardăm a impune succesiunea regulată a zecimalelor unui număr ca pe un criteriu care desemnează ordinea. Vom da în acest caz drept exemplu, celebrul număr al lui Champernowne, C=0,12345678910111213141516171819202 1... număr construit în așa fel încât zecimalele sunt numere naturale scrise în ordine crescătoare. Aparent avem o ordine foarte precisă, numai că s-a demonstrat că acest număr nu este nici măcar irațional ci chiar transcendent.

Căutările omului din cele mai vechi timpuri și până astăzi s-au canalizat în efortul de a găsi anumite legi ce guvernează fenomenele pe care le observă. Credința că există astfel de legi precise ce guvernează universul a constituit

Pierre Simon Laplace

motorul evoluției științifice a umanității. Observațiile asupra naturii au condus la elaborarea unor modele teoretice care aproximează realitatea în mai mare sau mai mică măsură în funcție de complexitatea lor. Au existat în decursul istoriei științei omenești și „excese de încredere" cum ar fi celebra afirmație a matematicianului Laplace, care în 1776 enunța într-un moment de entuziasm principiul *determinismului mecanicist*: „Stadiul actual al sistemului naturii este, evident o consecință a ceea ce a fost în momentul precedent și dacă ne închipuim o inteligență care la un moment dat cunoaște toate relațiile entităților acestui univers, ea ar putea stabili pozițiile respective și mișcările tuturor acestor entități în orice moment, în trecut sau în viitor. Astfel există lucruri care sunt incerte pentru noi, lucruri mai mult sau mai puțin probabile și noi căutăm să compensăm imposibilitatea de a le cunoaște, determinând diferite grade de probabilitate. Așa încât noi datorăm *slăbiciunii minții omenești* una din cele mai delicate și ingenioase dintre teoriile matematice, știința șansei sau a probabilității."

Credința lui Laplace că numai datorită „slăbiciunii minții omenești" nu putem descoperi trecutul și prevedea viitorul, pozițiile tuturor corpurilor din natură putând fi determinate doar cu o precizie limitată și având deci o anumită probabilitate de determinare prin calcul, conduce la ideea că dacă precizia instrumentelor de măsură ar crește foarte mult și precizia determinării mișcărilor ar crește în egală măsură.

Henri Poincaré

Lucrurile nu sunt însă atât de simple. În anul 1890, Henri Poincaré (1854–1912), studiind stabilitatea sistemului nostru solar (dacă planetele vor parcurge la infinit actualele orbite sau dacă dimpotrivă s-ar prăbuși într-un final pe soare sau ar părăsi sistemul solar), va scrie în lucrarea sa de referință: *Les methodes nouvelles de la mecanique celestes* în 1908: „O cauză foarte mică care ne scapă, determină un efect considerabil pe care nu putem să nu-l vedem și atunci zicem că acest efect s-a datorat întâmplării. Dacă cunoaștem exact legile naturii și situația universului în momentul inițial, vom putea prezice exact situația acestui univers la un moment ulterior. Dar chiar dacă legile naturii n-ar avea nici un secret pentru noi, nu vom putea cunoaște situația inițială decât aproximativ. Și aceasta ne permite să prevedem situația ulterioară cu aceeași aproximație, aceasta este tot ceea ce ne trebuie, spunem că fenomenul a fost prevăzut și el este condus de legi; dar nu este întotdeauna așa, se poate întâmpla ca mici diferențe în condițiile inițiale să genereze unele foarte mari în fenomenele finale; o mică eroare asupra primelor ar produce o eroare enormă asupra ultimelor. Prezicerea devine imposibilă și avem un fenomen întâmplător."

În sprijinul acestei afirmații vom oferi următorul exemplu, al unei stânci situate în vârful unui munte, în echilibru. Un mic impuls, într-un sens sau altul

poate conduce la mişcarea stâncii pe un versant sau pe celălalt, deci mişcări foarte mult diferite între ele, practic imprevizibile.

Studii ulterioare asupra unor fenomene de natură diversă au condus la constatarea că unele comportamente ale anumitor *sisteme dinamice* cu un număr relativ mic de parametri ce se produceau după legi deterministe, aveau un aspect întâmplător, haotic. Această descoperire a unor comportamente haotice în sisteme deterministe (guvernate de ecuaţii matematice precise) a dat naştere unui nou domeniu fascinant de studiu acela al teoriei *haosului determinist*.

Să precizăm pentru început noţiunea de *sistem dinamic*. Prin *sistem dinamic* definim orice sistem care prin natura sa (fizică, chimică, electromecanică, biologică, socială etc.) are o evoluţie temporală. Orice astfel de sistem dinamic poate fi simulat printr-un model matematic mai simplu sau mai complex. Cu cât modelul matematic este mai perfecţionat, răspunsul (ieşirile) acestuia la anumite intrări este mai apropiat de răspunsul măsurabil al sistemului dinamic real studiat.

5.2. DETERMINISM ŞI PREDICTIBILITATE. CONDIŢII. MODELE

S-a arătat anterior că un fenomen real poate fi studiat cu ajutorul unui model matematic adecvat. Modelul matematic respectiv este descris de ecuaţii algebrice sau diferenţiale după cum este cazul. De exemplu, s-a studiat în capitolele anterioare cazul unui oscilator neamortizat a cărui lege de mişcare (elongaţie) este descrisă de ecuaţia:

$$y = A\sin(\omega t + \varphi)$$

unde A este amplitudinea mişcării (elongaţia maximă), ω pulsaţia, φ faza iniţială, iar t evident timpul. Iată aşadar că sistemul dinamic masa-arc, adică oscilatorul este descris de o ecuaţie algebrică de tipul $y=y(t)$, adică o funcţie de timp. Modelul ca şi sistemul pe care-l descrie sunt temporale (are o evoluţie în timp). Fenomenul respectiv fiind descris de o ecuaţie matematică, este determinist. De asemenea, în orice moment de timp se poate preciza exact care este valoarea elongaţiei y (atunci când evident sunt cunoscute A, ω, φ) aşadar mărimea y are o evoluţie predictibilă.

Mai mult, variaţia lui y este periodică în timp, aşadar această mărime repetă după fiecare perioadă comportamentul anterior avut.

Este însă foarte interesant să remarcăm următorul lucru: pulsaţia depinde doar de masa corpului şi constanta elastică a resortului ($\omega = \sqrt{k/m}$), aşadar pentru un oscilator dat ea este constantă. Amplitudinea A şi faza iniţială depind însă de condiţiile iniţiale. În mecanică, condiţiile iniţiale se referă la *poziţia* şi *viteza* punctului studiat la momentul $t=0$ (momentul iniţial).

În cazul oscilatorului nostru dacă la momentul iniţial $t=0$ elongaţia lui este $y=y_o$, iar viteza imprimată în acel moment este $v=v_o$, atunci amplitudinea:

$$A = \sqrt{y_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2}$$

iar

$$\varphi = arctg\frac{y_o\omega}{v_o}$$

Aşadar pentru condiţii iniţiale (y_o, v_o) diferite, obţinem mişcări oscilatorii de amplitudini şi faze diferite. Este de remarcat însă faptul că la variaţii foarte mici ale condiţiilor iniţiale obţinem, de asemenea, variaţii nesemnificative ale amplitudinii şi fazei iniţiale, deci comportamentul variabilei *y(t)* nu se modifică semnificativ el rămâne periodic este deci *predictibil.*

Acest raţionament poate fi extins la o gamă largă de fenomene de diferite naturi. Iată de exemplu, în chimie reacţii chimice clasice la care condiţiile iniţiale de combinare a două elemente nu influenţează semnificativ substanţa finală.

Fenomenul este *determinist* (este modelat de ecuaţii chimice) şi *predictibil* – substanţa finală este aceeaşi.

În general, un sistem dinamic indiferent de natura lui am văzut că este descris de anumite ecuaţii diferenţiale ce în marea lor majoritate în cazul sistemelor mecanice îşi au originea în celebra ecuaţie a lui Newton (legea a II-a a mecanicii): $m\bar{a} = \bar{F}$.

Cum acceleraţia este definită ca derivata vitezei în raport cu timpul, sau derivata a doua a legii de mişcare în raport cu timpul, este clar că această clasică ecuaţie devine de fapt o ecuaţie diferenţială, a cărei integrare conduce la găsirea soluţiei cerute – legea de mişcare. Natura forţei F (membrul drept al ecuaţiei) este cea care determină o soluţie sau alta a ecuaţiei diferenţiale. Sunt şi situaţii când datorită complexităţii formei forţei F nu poate fi găsită o soluţie analitică a problemei (exactă) şi atunci problema capătă aşa-numita rezolvare numerică cu ajutorul tehnicii de calcul şi a metodelor de rezolvare numerică a ecuaţiilor diferenţiale.

De asemenea, este posibil ca anumite sisteme dinamice să reacţioneze la foarte mici perturbaţii ale condiţiilor iniţiale prin răspunsuri complet diferite ale mărimii studiate, evoluţia lor în timp devenind astfel *impredictibilă.* Modelul prin care exprimăm matematic un astfel de sistem nu mai poate avea simplitatea celui din cazul oscilatorului, trebuind să răspundă cât mai fidel comportamentului real al sistemului dinamic studiat.

Istoria matematicii consemnează faptul că aşa numitele *mişcări haotice* – prin mişcare atribuind un sens mult mai larg anumitor fenomene decât înţelesul pur mecanicist al termenului şi anume acela de dezvoltare, manifestare, evoluţie etc – au fost descoperite de Poincaré în perioada când a studiat mişcările celor trei corpuri cereşti sub acţiunea unor forţe de atracţie universală. Matematicianul nu a numit „haotice" mişcările respective şi de aceea unii exegeţi s-au grăbit să afirme că de fapt Poincaré nu ar fi înţeles în esenţă mişcarea haotică, deşi din evoluţia cercetărilor sale este foarte probabil să o fi înţeles.

Progresul uriaş făcut de comunitatea ştiinţifică în înţelegerea acestui nou tip de fenomen cu care variate domenii ale ştiinţei începeau să se confrunte tot mai frecvent, a venit odată cu dezvoltarea impetuoasă a tehnicii moderne de calcul, a calculatoarelor electronice. Cu ajutorul acestora înţelegerea şi demonstrarea fenomenelor de natură haotică a putut fi aprofundată.

5.3 DETERMINISM ŞI IMPREDICTIBILITATE
COMPORTAMENTUL HAOTIC. CONDIŢII

S-a amintit mai devreme că există anumite „comportamente" ale unor sisteme dinamice ce pot fi modelate, descrise prin ecuaţii matematice precise, deci deterministe ce nu pot fi în niciun fel prevăzute în dinamica desfăşurării lor. În anumite condiţii acestea prezintă un comportament „normal", la care poate că ne aşteptam, în altele, foarte puţin schimbate faţă de primele, răspunsul sistemului dinamic este complet diferit, analiza globală a comportamentelor sistemului în cazul unor minime variaţii ale condiţiilor iniţiale fiind aproape imposibilă.

În anii '60 un meteorolog ce lucra la Massachusets Institut of Technology (M.I.T.), Edward Lorenz, comunică o lucrare surprinzătoare într-o revistă de specialitate. El reuşeşte în încercarea sa de a prevedea starea vremii să prezinte un model matematic ce modelează cu ajutorul a doar trei ecuaţii diferenţiale neliniare fenomenul „convecţiei Rayleigh – Benárd" ce guvernează deplasările şi comportamentul maselor de aer (inclusiv norii). Modelul, ce prezintă o mare *sensibilitate la condiţiile iniţiale îl face pe Lorentz să publice mai târziu un articol* al cărui titlu în traducere ar fi: „Poate fâlfâitul aripilor unui fluture să provoace un uragan în Texas?"

În articol, autorul arată că datorită marii sensibilităţi a sistemului dinamic al atmosferei terestre la condiţiile iniţiale, este posibil ca un fâlfâit de aripă de fluture să provoace la un interval de timp suficient de lung un uragan la mare distanţă de locul bătăii din aripi. Acest efect a fost numit şi a rămas deja în limbajul curent ştiinţific şi nu numai, „Lorentz Butterfly" (fluturele lui Lorentz) sau „Butterfly effect" (efectul fluturelui). Pentru a putea comunica lumii ştiinţifice surprinzătoarea sa concluzie, Lorenz este primul om de ştiinţă ce utilizează experimentul numeric pe un calculator rudimentar, dacă îl comparăm cu performanţele celor actuale, *numit Royal Mc Bee.*

Din nefericire, comunicarea lui Edward Lorenz rămâne câţiva ani într-un oarecare anonimat poate şi datorită insuficientei răspândiri a revistei de meteorologie în care el şi-a publicat cercetările.

În anul 1963 David Ruelle şi Floris Takens, studiind anumite fenomene petrecute în fluide – turbulenţa – găsesc comportamente asemănătoare cu cele descrise de Lorenz. Ei atribuie imaginii grafice realizate pe calculator a acestor comportamente (asupra cărora vom da mai multe detalii în capitolul următor) denumirea de *„atractor straniu"*.

În anii ce au urmat alţi cercetători dezvoltă acest nou şi fascinant domeniu al teoriei haosului, găsind asemenea comportamente imprevizibile în foarte multe domenii de investigaţie.

Aminteam că modelul matematic al unui sistem dinamic poate fi o ecuaţie sau un sistem de ecuaţii diferenţiale în care intervin o serie de variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi o serie de parametri $a_1, a_2, \ldots, a_k$, ce uneori, pentru o situaţie dată, pot fi consideraţi

5.3. DETERMINISM ŞI IMPREDICTIBILITATE. COMPORTAMENTUL HAOTIC. CONDIŢII

S-a amintit mai devreme că există anumite „comportamente" ale unor sisteme dinamice ce pot fi modelate, descrise prin ecuaţii matematice precise, deci deterministe ce nu pot fi în niciun fel prevăzute în dinamica desfăşurării lor. În anumite condiţii acestea prezintă un comportament „normal", la care poate că ne aşteptam, în altele, foarte puţin schimbate faţă de primele, răspunsul sistemului dinamic este complet diferit, analiza globală a comportamentelor sistemului în cazul unor minime variaţii ale condiţiilor iniţiale fiind aproape imposibilă.

În anii '60 un meteorolog ce lucra la Massachusets Institut of Technology (M.I.T.), Edward Lorenz, comunică o lucrare surprinzătoare într-o revistă de specialitate. El reuşeşte în încercarea sa de a prevedea starea vremii să prezinte un model matematic ce modelează cu ajutorul a doar trei ecuaţii diferenţiale neliniare fenomenul „convecţiei Rayleigh – Benárd" ce guvernează deplasările şi comportamentul maselor de aer (inclusiv norii). Modelul, ce prezintă o mare sensibilitate la condiţiile iniţiale îl face pe Lorentz să publice mai târziu un articol al cărui titlu în traducere ar fi: „Poate fâlfâitul aripilor unui fluture să provoace un uragan în Texas?"

În articol, autorul arată că datorită marii sensibilităţi a sistemului dinamic al atmosferei terestre la condiţiile iniţiale, este posibil ca un fâlfâit de aripă de fluture să provoace la un interval de timp suficient de lung un uragan la mare distanţă de locul bătăii din aripi. Acest efect a fost numit şi a rămas deja în limbajul curent ştiinţific şi nu numai, „Lorentz Butterfly" (fluturele lui Lorentz) sau „Butterfly effect" (efectul fluturelui). Pentru a putea comunica lumii ştiinţifice surprinzătoarea sa concluzie, Lorenz este primul om de ştiinţă ce utilizează experimentul numeric pe un calculator rudimentar, dacă îl comparăm cu performanţele celor actuale, numit Royal Mc Bee.

Din nefericire, comunicarea lui Edward Lorenz rămâne câţiva ani într-un oarecare anonimat poate şi datorită insuficientei răspândiri a revistei de meteorologie în care el şi-a publicat cercetările.

În anul 1963 David Ruelle şi Floris Takens, studiind anumite fenomene petrecute în fluide – turbulenţa – găsesc comportamente asemănătoare cu cele descrise de Lorenz. Ei atribuie imaginii grafice realizate pe calculator a acestor comportamente (asupra cărora vom da mai multe detalii în capitolul următor) denumirea de *„atractor straniu"*.

În anii ce au urmat alţi cercetători dezvoltă acest nou şi fascinant domeniu al teoriei haosului, găsind asemenea comportamente imprevizibile în foarte multe domenii de investigaţie.

Aminteam că modelul matematic al unui sistem dinamic poate fi o ecuaţie sau un sistem de ecuaţii diferenţiale în care intervin o serie de variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi o serie de parametri $a_1, a_2, \ldots, a_k$, ce uneori, pentru o situaţie dată, pot fi consideraţi

constanți. De asemenea, un sistem dinamic mai poate fi descris și de o relație sau mai multe de recurență de tipul:

$$x_n = f(x_{n-1}, a)$$

Sistemele dinamice la care s-a pus în evidență comportamentul haotic prezintă și următoarea „bizarerie". Pentru un anumit set al parametrilor a_1, a_2, ..., a_k este posibil ca sistemul să aibă o comportare regulată, iar pentru un alt set, o comportare haotică. Mai mult s-au pus în evidență adevărate „plaje de valori" ($a_p' < a_p < a_p''$) între care parametrii a_p pot baleia și sistemul să aibă comportamente regulate, să le spunem periodice, după care în afara acestor intervale să intervină comportamentul haotic și apoi din nou sistemul să prezinte o comportare regulată. Aceste intervale, de obicei înguste (a_p', a_p''), în care sistemul dinamic se comportă regulat se numesc „ferestre periodice".

Cercetarea acestor sisteme dinamice cu comportări haotice a condus la concluzia că pentru ca un astfel de sistem să prezinte acest tip de comportamente sunt necesare câteva criterii:

– sistemul dinamic să fie descris de trei ecuații diferențiale de ordinul I *neliniare* (deci să existe trei variabile ce descriu comportarea sistemului) sau măcar o relație de tip *recurențial*;

– sistemul dinamic să fie foarte sensibil la condițiile inițiale (perturbații foarte mici ale acestora conduc la comportamente total diferite, imprevizibile);

– sistemul dinamic se comportă complet diferit pentru valori diferite ale parametrilor ce sunt incluși în ecuațiile ce descriu fenomenul.

De asemenea, s-a mai constatat că un sistem dinamic poate să nu aibă un comportament haotic de la început ci el să evolueze către haos în timp. Există, în literatura de specialitate, descrise trei căi de evoluție către haos a unui sistem dinamic:

– prin „trei bifurcări" (teoria Ruelle – Takens);
– prin „dublarea perioadei" (teoria Feigenbaum);
– prin „intermitență" (Pomeau – Manneville).

În natură, aceste fenomene haotice sunt destul de numeroase. Uraganele despre care amintea Lorenz, zgomotul eolian produs de vântul ce întâlnește un obstacol sau un tub, curgerea turbulentă a unor cursuri de ape în anumite zone, anumite mișcări tectonice, mișcările asteroizilor și ale particulelor încărcate electric în acceleratorii de particule etc. Comportamentul haotic nu este însă numai apanajul lumii neînsuflețite. În lumea vie există o multitudine de exemple. Iată de pildă anumite fenomene de dezvoltare celulară – formațiunile maligne la mamifere, de exemplu – sau unele „accidente" în funcționarea normală, predictibilă, „programată" a unor organe la mamifere, de exemplu – infarctul miocardic etc. De asemenea, evoluția numărului indivizilor unei specii poate prezenta aspecte haotice dar deterministe după cum a demonstrat Feigenbaum în celebra sa „aplicație".

În tehnică există, de asemenea, nenumărate exemple de comportamente ieșite din sfera predictibilului – haotice ale unor piese sau ansambluri ce intră în compunerea unor mașini sau dispozitive. Fenomenele vibratorii „necontrolate" ale

unor ansambluri ce se deplasează rectiliniu în raport cu suprafețe fixe (autovibrații), comportamente vibratorii haotice în lagăre hidrodinamice, hidrostatice și în rulmenți, comportamente haotice în procesul de așchiere pe mașini – unelte, fenomenul de stick - sleep, „flutter"-ul supapelor cilindrilor de la motoarele de automobile, în anumite condiții improprii de alimentare – evacuare, fenomenul de „cavitație" al conductelor de apă la anumite viteze de curgere, fenomen depistabil prin „țiuitul" sau „huruitul" conductei etc. După cum este lesne de sesizat, aceste fenomene negative sunt de evitat și din acest motiv studiul lor, dezvoltarea metodelor de investigare a acestor fenomene devine tot mai importantă.

O demonstrație sugestivă prin care putem urmări cum două sisteme aparent asemănătoare au comportamente total diferite este următoarea: să presupunem o bilă în interiorul unei sfere. Ea evident va fi în repaus în punctul cel mai de jos al sferei. Să „perturbăm" această poziție de echilibru a bilei, mutând-o într-un alt punct apropiat pe interiorul sferei și apoi lăsând-o liberă. Este evident că ea va începe să se miște în jurul poziției inițiale de echilibru, treptat mișcarea amortizându-se până când în final bila își va recăpăta vechea poziție. Acesta reprezintă un *punct de echilibru stabil*.

Cu totul alta este situația atunci când așezăm bila pe suprafața exterioară a sferei. În acest caz unica poziție de echilibru posibilă este în punctul cel mai de sus al sferei. O mică perturbare a poziției de echilibru face ca inevitabil bila să alunece pe suprafața sferei nemairevenind niciodată la poziția inițială avută. Această poziție reprezintă un *punct de echilibru instabil*, bila în această situație îndepărtându-se definitiv de poziția de echilibru.

5.4. DESCRIEREA COMPORTAMENTULUI HAOTIC. SPAȚIUL FAZELOR. ATRACTORI CLASICI ȘI STRANII

Punerea în evidență cu certitudine a comportamentului haotic al unui **sistem dinamic** nu este o întreprindere facilă. Există mai multe metode de investigație a acestor comportamente. Vom trece în revistă câteva dintre metodele clasice utilizate.

1. Analiza comportării în timp a unei variabile semnificative (time history, time series)

Reprezentând pe abscisă timpul și pe ordonată variabila semnificativă aleasă $x(t)$ se obține o imagine grafică ce poartă denumirea de *vibrogramă*. În cazul unei mișcări haotice se obține o vibrogramă ce nu prezintă nici o urmă de periodicitate. Se poate însă observa o anumită „natură recurentă" adică se observă anumite „aluri" ale graficului care se repetă, dar la intervale neregulate de timp, creând senzația unui comportament aleator. În figura 5.1, a este redată vibrograma unei mișcări periodice, iar în figura 5.1, b cea a unei mișcări haotice.

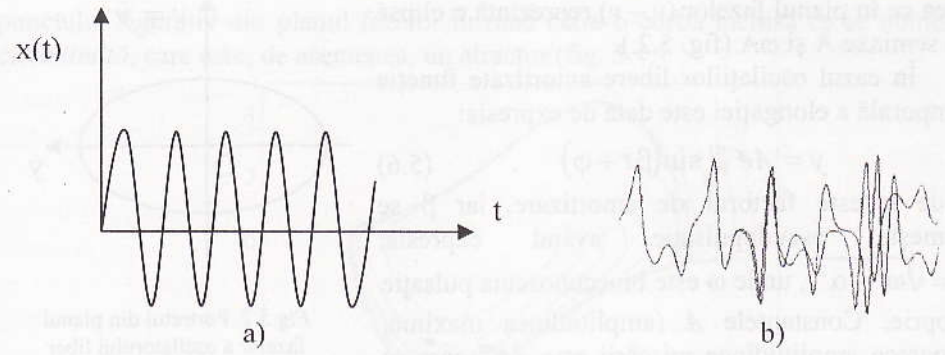


Fig. 5.1. Vibrograme. a) mişcare periodică; b) mişcare haotică.

2. Portretul din planul fazelor

Reprezentând pe abscisă o variabilă semnificativă *x(t)* şi pe ordonată viteza acesteia $\dot{x}(t)$ (derivata întâi în raport cu timpul a variabilei *x(t)*) obţinem pentru un moment de timp ales, un punct în acest plan. Planul astfel definit se numeşte *planul fazelor*, iar punctul imortalizat la momentul de timp *t* poartă denumirea de *punct figurativ în planul fazelor.*

Dacă lasăm timpul să „curgă", acest punct figurativ se va deplasa în planul fazelor descriind o anumită curbă ce poartă denumirea de *portretul din planul fazelor*. Un asemenea mod de reprezentare este evident mai bogat în informaţii privitoare la dinamica sistemului, deoarece indică simultan informaţii cu privire la *poziţia* şi *viteza* punctului figurativ.

Aceleaşi consideraţii se pot face dacă în loc de două variabile (poziţia şi viteza) alegem trei variabile cu ajutorul cărora prin reprezentarea spaţială a acestora într-un triedru triortogonal drept, configurăm *spaţiul fazelor*.

Spre exemplu dacă dorim să reprezentăm în planul fazelor comportarea oscilatorului armonic descris în subcapitolele anterioare vom alege evident ca variabilă semnificativă elongaţia y. Reamintim că:

$$y = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{5.1}$$

Ştim de asemenea că viteza oscilatorului este:

$$v = \dot{y} = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \tag{5.2}$$

Pentru a reprezenta *evoluţia* oscilatorului în planul fazelor, adică în coordonate (*y, v*) este necesar să eliminăm timpul între ecuaţia elongaţiei şi cea a vitezei.

Din (5.1) şi (5.2) rezultă simultan:

$$\sin(\omega t + \varphi) = \frac{y}{A} \tag{5.3}$$

$$\cos(\omega t + \varphi) = \frac{v}{\omega A} \tag{5.4}$$

şi apoi prin ridicarea la pătrat şi însumarea relaţiilor (5.3) şi (5.4) vom avea:

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{v^2}{(\omega A)^2} = 1 \tag{5.5}$$

ceea ce în planul fazelor ($y - v$) reprezintă o elipsă de semiaxe A şi ωA (fig. 5.2.)

În cazul oscilaţiilor libere amortizate funcţia temporală a elongaţiei este dată de expresia:

$$y = Ae^{-\alpha t}\sin(\beta t + \varphi) \qquad (5.6)$$

unde α este factorul de amortizare, iar β se numeşte pseudopulsaţie având expresia: $\beta = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$, unde ω este binecunoscuta pulsaţie proprie. Constantele A (amplitudinea maximă, deoarece amplitudinea mişcării este $Ae^{-\alpha t}$ care se observă că scade în timp) şi faza iniţială φ rezultă din condiţiile iniţiale ale mişcării, adică la momentul iniţial $t=0$, $y=y_0$, $v=v_0$.

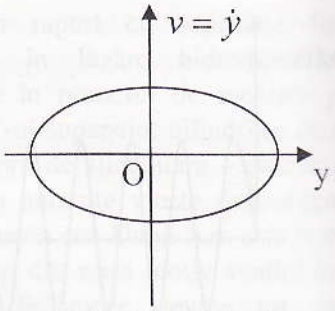


Fig 5.2. Portretul din planul fazelor a oscilatorului liber

Se obţin:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \alpha x_0}{\beta}\right)^2} \qquad (5.7)$$

şi

$$\varphi = arctg\frac{\beta x_o}{v_o + \alpha x_o} \qquad (5.8)$$

Viteza vibraţiei libere amortizate este:

$$v = \dot{y} = Ae^{-\alpha t}[\beta\cos(\beta t + \varphi) - \alpha\sin(\beta t + \varphi)] \qquad (5.9)$$

Reprezentând mişcarea în planul fazelor (y – v) vom obţine următorul portret (fig. 5.3.):

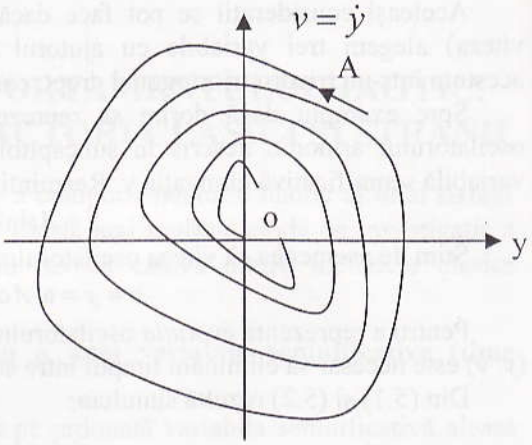


Fig. 5.3. Portretul din planul fazelor în cazul vibraţiei libere amortizate.

Fig. 5.3. Portretul din planul fazelor în cazul vibraţiei libere amortizate.

Punct limită

Se observă că mişcarea punctului figurativ este pe o spirală care începe în punctul A şi se termină în origine. Punctul către care tinde traiectoria punctului figurativ din planul fazelor se numeşte *punct limită* şi este un *atractor* („atrage" traiectoria).

Există şi alte mişcări regulate la care mişcarea nu se „stinge" pur şi simplu ca în cazul punctului limită, ci ea se stabilizează la anumite valori, traiectoria

punctului figurativ din planul fazelor tinzând către o curbă închisă ce se numeşte *ciclu limită*, care este, de asemenea, un atractor (fig. 5.4.).

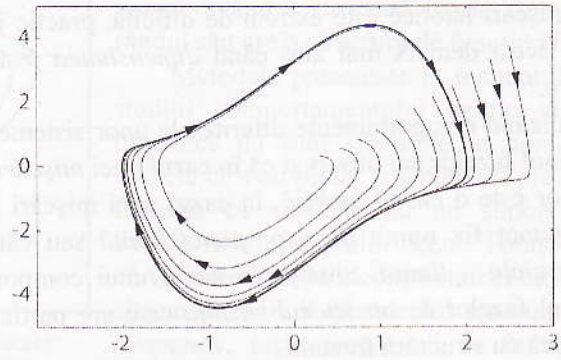


Fig. 5.4. Portretul din planul fazelor în cazul unui *ciclu limită*

Este de remarcat faptul că punctul figurativ poate parcurge traiectoria din interiorul ciclului limită tinzând către acesta sau din exteriorul său tinzând de asemenea către el.

În cazul unei mişcări haotice însă, portretul din planul fazelor devine mult mai complicat aşa cum se poate observa în figura 5.5.

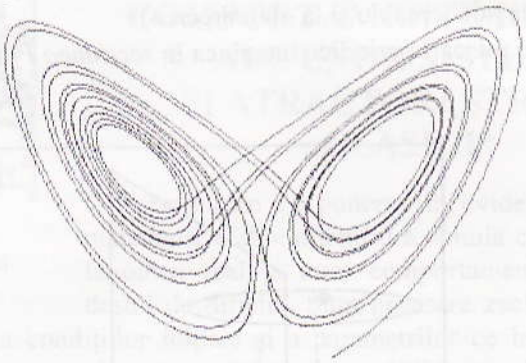


Fig. 5.5. Portretul din planul fazelor în cazul unei *mişcări haotice*

Atractor straniu

Este interesant însă, faptul că traiectoriile punctului figurativ practic nu se repetă niciodată, dar ele rămân cantonate într-un spaţiu finit bine delimitat care în cazul mişcărilor haotice disipative se micşorează continuu.

Această curbă complicată dar mărginită ca domeniu a traiectoriilor din planul fazelor în cazul mişcărilor haotice poartă denumirea de *atractor straniu,* denumire conferită de Ruelle şi Takens în 1971.

Atractorul straniu are o particularitate interesantă: el are o structură de *fractal*. De aici decurg pentru mişcările haotice o serie de proprietăţi cum ar fi aceea că mişcarea este foarte sensibilă la condiţiile iniţiale, adică de exemplu, două mişcări

ce pornesc în planul fazelor din puncte inițiale foarte apropiate se îndepărtează una de alta suficient de mult, rămânând totuși într-o suprafață limitată. De aceea, *predicția* unei mișcări haotice este extrem de dificilă, practic imposibilă, existând incertitudine în acest demers mai ales când *dimensiunea fractală* a *atractorului straniu* este mare.

Așadar analizând comportamente diferite ale unor sisteme dinamice utilizând portretul din planul fazelor am observat că în cazul unei *mișcări periodice* portretul din planul fazelor este o *curbă închisă*, în cazul unei mișcări regulate o curbă ce tinde către un punct fix numit *atractor punct limită* sau către o curbă închisă numită *atractor ciclu – limită.* Situația în cazul unui comportament haotic este relevată în planul fazelor de *atractorul straniu* care are particularitatea că este o entitate geometrică cu structură fractală.

3. Aplicația stroboscopică Poincaré

Fără a intra în detaliile matematice ale metodei, vom încerca să oferim o „imagine sugestivă" a acesteia. Să presupunem că intersectăm planul fazelor cu un alt semiplan perpendicular pe acesta și că vom urmări imaginile pe care traiectoriile din planul fazelor le vor lăsa pe acest semiplan. (Traiectoria intersectează semiplanul doar la «ducere» nu și la «întoarcere»)

În cazul unei mișcări periodice imaginea în *secțiunea Poincaré* se reduce la un punct (fig. 5.6.).

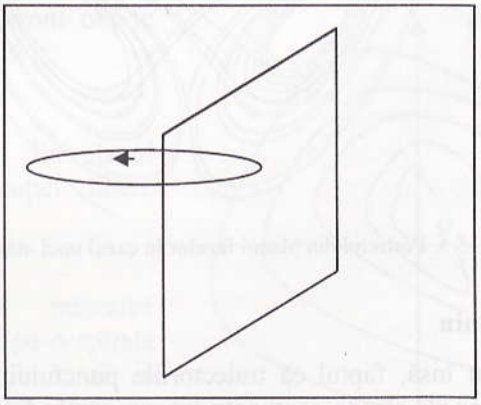


Fig. 5.6. „Secțiune Poincaré" în cazul unei mișcări periodice

În cazul unei mișcări care tinde către o mișcare periodică (ciclu limită) sau către un punct limită, secțiunea Poincaré prezintă o infinitate de puncte care au însă ca punct limită „imaginea stroboscopică" a punctului corespunzător mișcării periodice spre care tinde mișcarea, adică imaginea punctului critic limită (fig. 5.7.).

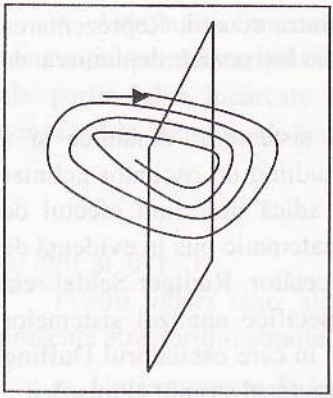


Fig. 5.7. „Secțiune Poincaré" în cazul unei mișcări oscilatorii amortizate

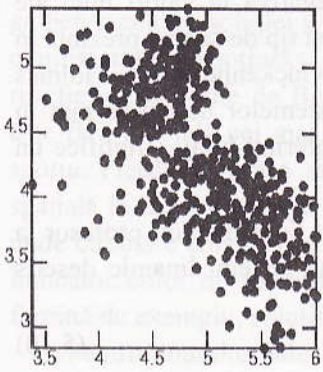


Fig. 5.8. „Secțiunea Poincaré" în cazul unei mișcări haotice

În cazul unei mișcări haotice, secțiunea Poincaré este formată în general dintr-o *mulțime densă de puncte* având o structură foarte complexă și care la rândul său are o structură de **fractal** (fig.5.8.).

Metodele prezentate în manualul de față pentru studiul comportamentului haotic al unor sisteme dinamice nu sunt singurele în domeniu, însă sunt unicele ce s-au pretat la a putea fi prezentate, datorită faptului că celelalte au un suport matematic ce excede nivelul cursului liceal. Totuși trebuie amintit că validarea 100% a comportamentului haotic al unui sistem dinamic îl dă calculul așa numiților *exponenți Lyapunov*, niște parametrii ce în cazul mișcărilor haotice au anumite valori bine precizate și care pot da certitudinea că într-adevăr s-a depistat un comportament haotic al unui sistem dinamic.

5.5. CÂTEVA INFORMAȚII ACTUALE CU PRIVIRE LA COMPORTAMENTE HAOTICE ALE UNOR SISTEME ȘI ATRACTORI STRANII „CLASICI"

Aminteam că punerea în evidență pe modelul matematic elaborat pentru a simula cât mai exact un fenomen real, a unor comportamente haotice este destul de dificilă. Sunt necesare zeci sau poate sute de ore de „baleiere" a condițiilor inițiale și a parametrilor ce intră în structura ecuațiilor ce descriu fenomenul pentru a găsi *acele* condiții în care haosul are șanse să apară. Tocmai de aceea, în literatura de specialitate numele celor ce au studiat un anumit sistem dinamic căruia i-au găsit comportamente haotice, deci au pus în evidență un *atractor straniu*, a fost atribuit acelui atractor. Vom întâlni așadar descrieri de genul „atractorul Lorenz", „atractorul Rosler" etc.

- Am amintit deja despre modelul lui Lorenz cu privire la mișcările unor mase de aer în anumite condiții, fenomene specifice meteorologiei și care prezintă în condiții bine determinate un atractor straniu – deci un comportament haotic. Acest atractor este cunoscut în lumea științifică drept „atractorul straniu al lui Lorenz".
- În anul 1976, un cercetator, Otto Rösler imaginează un sistem simplu, considerat probabil cea mai elementară construcție geometrică a haosului, utilizând un sistem de trei ecuații diferențiale oarecum asemănătoare cu ale lui Lorenz însă

factorul de neliniaritate fiind prezent numai într-una dintre ecuații. Reprezentarea comportamentului acestui sistem în spațiu (planul) fazelor poartă denumirea de „atractorul straniu al lui Rösler".

- Mult înainte de apariția acestei noi teorii a sistemelor dinamice și a haosului determinist, în 1918, un cercetător, Duffing studiind un oscilator neliniar având termenul ce descrie rigiditatea arcului, cubic, adică descriind efectul de „întărire" (hardening) a arcului, elaborează un model matematic pus în evidență de o ecuație diferențială neliniară. În anul 1988 un alt cercetător, Rudiger Seidel reia ecuația lui Duffing și o studiază cu instrumentele specifice analizei sistemelor dinamice, determinând cu certitudine o anumită „zonă" în care oscilatorul Duffing are un comportament haotic, punând deci în evidență atractorul straniu al mișcării.

- În anul 1927, Van der Pol găsește o ecuație diferențială neliniară ce modelează un circuit electronic cu o triodă ale cărei proprietăți rezistive se schimbă în funcție de intensitatea curentului, rezistența fiind negativă la valori mici ale intensității și devenind pozitivă când curentul crește. Acest tip de sistem prezintă în mod tipic aspecte de tip **ciclu limită.** Totuși în 1983, Guckenheimer și Holmes utilizând metodele matematice nou-apărute în teoria sistemelor dinamice pun în evidență comportamente haotice ale sistemului studiat, oferind lumii științifice un nou **atractor straniu.**

- Anul 1977 prezintă lumii științifice prin Mitchell Feigenbaum, profesor la Rockefeller University din New York, un model al unui sistem dinamic descris printr-o *relație de recurență*:

$$x_n = \lambda(1 - x_{n-1})x_{n-1} \qquad (5.10)$$

$$\text{cu } 0 < \lambda \leq 4 \text{ și } 0 < x_n < 1.$$

relație ce oferă dependența unei variabile x, la „pasul" n, în funcție de valoarea variabilei x la pasul anterior, n–1, și care poartă denumirea de „aplicația Feigenbaum".

Acest model pretabil la studiul dezvoltării populațiilor unei specii pune în evidență și el posibilitatea apariției comportamentelor haotice pentru anumite valori ale parametrului λ. Studiul matematic al modelului pe lângă faptul că scoate în evidență o anumită constantă F denumită *constanta lui Feigenbaum* ce intervine într-o clasă destul de mare de fenomene naturale în care apar comportamente haotice, mai arată că practic, deoarece precizia oricărei măsurări este limitată, prevederea nu se poate face decât pe o perioadă limitată de timp. A prevedea pe timp nelimitat ar însemna o precizie infinită a măsurării condițiilor inițiale, ceea ce practic este imposibil.

Acest fenomen este cunoscut sub numele de *pierderea memoriei condițiilor inițiale.*

▪ Astronomii francezi M. Henon şi Y. Pomeau propun în anul 1975 un model recurenţial pentru studiul orbitelor asteroizilor şi ale altor corpuri cereşti, precum şi ale particulelor încărcate electric în acceleratorii de particule. Modelul este consacrat în literatura de specialitate sub denumirea de *aplicaţia Henon*:

$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2 \qquad (5.11)$$
$$y_{n+1} = bx_n$$

cu $a>0$ şi $0<b<1$.

Pentru valori mari ale lui n (număr mare de paşi) este pusă în evidenţă prezenţa atractorului straniu.

▪ Un caz extrem de interesant în domeniul chimiei este aşa-numitul *oscilator chimic – Belousov – Zhabotinsky*. Studiind oxidarea acidului citric cu bromat de potasiu având catalizator cuplul redox Ce^{3+}/Ce^{4+}, chimistul rus Belousov observă din întâmplare oscilaţii puse în evidenţă de alternanţa regulată a culorii galben/incolor a soluţiei şi comunică în anul 1958 aceste rezultate. Ulterior, tânărul chimist rus Zhabotinsky îşi consacră teza de doctorat studiului mecanismului reacţiei descoperite de Belousov. Mediul reacţiei Belousov – Zhabotinsky (B.Z.) este fără îndoială cel mai studiat. Găsim aici un comportament straniu în *timp şi spaţiu*. Plecând de la o amestecare uniformă a reactivilor B.Z. apare o structură spaţială în mediul reacţiei în câteva minute, sub formă de inele într-un tub sau de unde circulare concentrice în straturi subţiri. Variind concentraţiile şi adăugând un indicator color de oxido-reducere observăm schimbări spontane de culoare. Cu feroină de exemplu, soluţia trece alternativ de la roşu la albastru.

Pentru anumite valori ale debitelor reactivilor, reacţia B.Z. este periodică şi portretul din planul fazelor este deci un ciclu limită. Situaţia se schimbă radical pentru alte valori ale debitului, unde poate fi descoperit regimul haotic reprezentat evident prin atractorul straniu prezent în planul fazelor.

În final dorim să vă propunem un exerciţiu de imaginaţie sau de ce nu un experiment foarte simplu. Urcaţi-vă în vârful unei rampe naturale, reale. Drumul ce duce către vârful rampei este unul cu denivelări-diverse dâmburi şi mici gropi. Lansaţi o bilă de popice către baza planului înclinat şi urmăriţi-i traiectoria. Repetaţi experimentul, lansând din nou din acelaşi loc şi în aceleaşi condiţii bila. Veţi constata cu surprindere că pentru fiecare încercare traiectoria va fi diferită. Aceasta deoarece de fiecare dată schimbaţi puţin condiţiile iniţiale (poziţia şi viteza), cu alte cuvinte nu se pot reproduce 100% condiţiile iniţiale anterioare, iar o mică variaţie a acestora conduce la obţinerea de traiectorii foarte diferite.

Enumerările sistemelor ce prezintă comportamente haotice pot continua şi acoperi variate domenii ale naturii şi activităţilor umane. Noi ne vom rezuma la cele prezentate, cu speranţa că am deschis o fereastră către dorinţa tinerei generaţii de a afla mai mult şi de ce nu, de a descoperi noi atractori stranii.

Test

Citiți afirmațiile de mai jos. Alegeți A sau F după cum afirmația este adevărată sau falsă.

1. A F *Vibrograma* unei mișcări haotice este periodică
2. A F *Atractorul punct limită* descrie o mișcare regulată.
3. A F *Atractorul straniu* este *portretul din planul fazelor* al unei mișcări periodice.
4. A F *Atractorul straniu* are o structură de *fractal.*
5. A F Fenomenele haotice se produc numai în natură.
6. A F Un *sistem dinamic* ce poate prezenta comportamente haotice nu este sensibil la *condițiile inițiale.*
7. A F Comportamentul haotic apare doar în *sistemele neliniare.*
8. A F Pentru *orice* valori ale parametrilor ce descriu un sistem dinamic poate apărea comportamentul haotic.

5.6 ELEMENTE DE GEOMETRIE FRACTALĂ

5.6.1. Introducere

Încă din cele mai îndepărtate perioade ale umanității, oamenii au încercat să-și explice anumite fenomene, obiecte pe care le observau, confecționând anumite *modele* care să le simplifice înțelegerea și să-i facă să pătrundă mai adânc tainele naturii. De multe ori aceste modele au fost simpliste, aproximând în mai mică sau în mai mare măsură natura, a cărei complexitate s-a dovedit a fi superioară modelelor elaborate. Pe măsură ce umanitatea s-a dezvoltat și știința a evoluat, s-a încercat elaborarea unor „modele" tot mai complexe a căror cercetare să conducă la concluzii cât mai apropiate de fenomenele reale observate.

Una dintre primele științe pe care omul a încercat să o elaboreze, iar mai apoi să o perfecționeze a fost geometria. Este extrem de interesant faptul că geometria, așa cum este percepută ea de o covârșitoare majoritate a oamenilor este o știință ale cărei baze au fost puse în antichitate de către Euclid (325–265 î.C.) cel care formulează celebrul *postulat numărul 5* ce-i poartă numele, intitulat și *postulatul paralelelor* și pe care se întemeiază întreaga geometrie clasică ce se mai numește și *geometrie euclidiană.* Aceasta operează cu forme geometrice de obicei regulate – dreaptă, pătrat, dreptunghi, triunghi, cerc, prismă, piramidă, cilindru, con, sferă etc.

După mai bine de două milenii apar și alte genuri de geometrii, așa numitele *geometrii neeuclidiene,* în care celebrul postulat nu mai este valabil, iar întregul eșafodaj al noilor geometrii este clădit pe alt postulat ce admite construcția a două drepte paralele printr-un punct exterior unei drepte date.

Părinții acestor geometrii au fost matematicienii Nikolai Lobacevski (1792–1856) din Rusia și Janos Bolyai (1802–1860) de origine maghiară, dar născut la Timișoara.

Cu toate acestea în a doua parte a secolului al XIX-lea și începutul secolului al XX-lea anumiți matematicieni comunică în cadrul unor foruri științifice găsirea unor *entități geometrice* excepționale, fără nicio asemănare cu figurile și corpurile geometrice studiate până atunci. Aceste entități sunt numite de matematicienii vremii „monștrii matematici" și sunt comunicate în revistele de specialitate ale acelei perioade sub titluri într-adevăr înspăimântătoare pentru orice matematician cu morgă al acelor timpuri: „O curbă de lungime infinită ce limitează o arie finită și care nu admite tangente în niciun punct" (curba lui Koch) sau „Obiecte geometrice de dimensiune neîntreagă" (dimensiunea Hausdorff) etc. Printre cei care găsesc și prezintă lumii științifice astfel de „monștri matematici" se numără: Georg Cantor (1845–1918), Giuseppe Peano (1858–1932), Helge von Koch (1870–1924), Waclaw Sierpinski (1882–1969), Felix Hausdorff (1868–1942) ș.a.m.d.

Cel care își dă seama că asemenea „monștri matematici" nu constituie doar un exercițiu de imaginație geometrică, ci că astfel de entități se regăsesc de fapt în natură, ba mai mult, natura oferă aproape în exclusivitate astfel de forme, a fost matematicianul francez Benoit Mandelbrot. El observă ca în realitate forma unui munte nu este aceea a unei piramide sau a unui con, trunchiul îmbrăcat cu scoarță al unui copac nu este un cilindru perfect neted, norii nu sunt sfere etc. În natură nu întâlnim de fapt forme geometrice simple, regulate ci dimpotrivă forme cu un înalt grad de complexitate și unicitate. Din această simpla „revelație" s-a născut o nouă știință ce studiază aceste forme complexe, știință ce poartă denumirea de *geometrie fractală.*

5.6.2. Autosimilaritate

Cuvântul fractal își are originile în adjectivul latin *fractus* ce derivă din verbul corespunzător *frangere* care înseamnă „a rupe", „a fragmenta", „a frânge".

Mandelbrot va folosi cuvântul *fractal* în sensul de *neregulat*, iar definiția pe care el o dă și pe care o vom adopta în continuare acestui termen este: „un ansamblu care prezintă aceleași neregularități la orice scară ar fi privit". Din punct de vedere geometric este un ansamblu ale cărui părți sunt într-o bună măsură identice cu întregul. Această proprietate se numeste *autosimilaritate.*

Într-un mod sugestiv se poate spune că dacă privim un obiect de o complexitate geometrică ridicată de la o anumită distanță, apoi facând un „zoom" îl privim din nou și repetând procedeul la infinit, imaginea pe care o vedem este aceeași.

Vom încerca în continuare să prezentăm câteva exemple:

a) Mulțimea lui Cantor (fig. 5.9).

Vom considera un segment de dreaptă. Eliminând treimea mijlocie se obțin două segmente a căror lungime este egală cu 1/3 din segmentul inițial. Continuăm operația și eliminăm treimile mijlocii ale celor două segmente. Vom obține patru

segmente ale căror lungimi sunt egale fiecare cu 1/9 din lungimile segmentului inițial. Extinzând procedeul la infinit se obține așa-numita mulțime Cantor. Este lesne de observat că reducând scara de 1:1 (segmentul inițial) la $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, ..., \frac{1}{3^n}$ vom avea mereu aceeași imagine (caracterul de autosimilaritate).

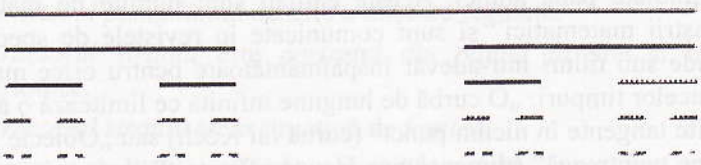


Fig. 5.9. Mulțimea lui Cantor

b) Curba lui von Koch (fig. 5.10.). Fie un segment de dreaptă (0). Eliminând treimea mijlocie și înlocuind-o cu două segmente egale, rezultă linia frântă (1) ce are segmentele egale cu 1/3 din segmentul inițial (0). Se continuă procedeul cu fiecare segment al liniei frânte (1), adică se elimină treimea mijlocie și se înlocuiește cu două segmente egale cu 1/9 din cel inițial. Extinzând procedeul la infinit se obține așa-numita curbă a lui von Koch. Dacă se reduce scara la $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, ..., \frac{1}{3^n}$ vom avea mereu aceeași imagine (*autosimilaritate*).

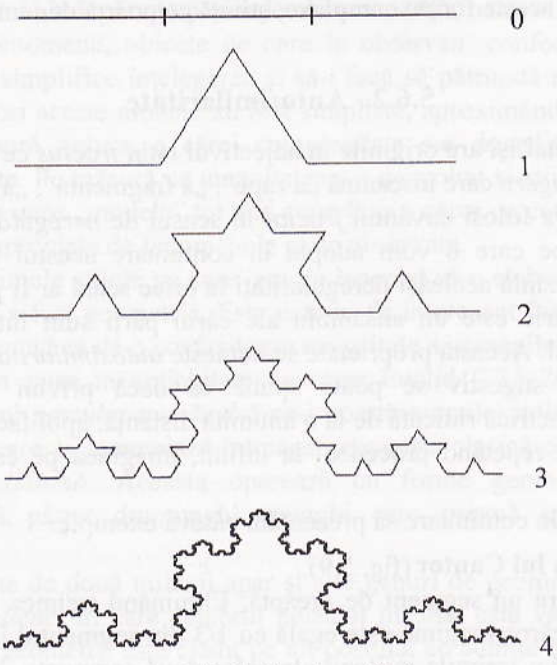


Fig. 5.10. Curba lui von Koch

c) Sita lui Sierpinsky (fig. 5.11).

Vom considera suprafața unui triunghi echilateral (0). Eliminând triunghiul median, vor rămane trei triunghiuri congruente cu triunghiul median eliminat (1). Eliminând în continuare triunghiurile mediane ale acestor trei triunghiuri se obține o figură formată din trei triunghiuri echilaterale congruente cu triunghiurile mediane eliminate. Extinzând procedeul la infinit se obține o mulțime de triunghiuri ce alcătuiesc *sita lui Sierpinsky*. Este evident că reducând scara la $\frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \ldots, \frac{1}{4^n}$ avem mereu aceeași imagine (*autosimilaritate*).

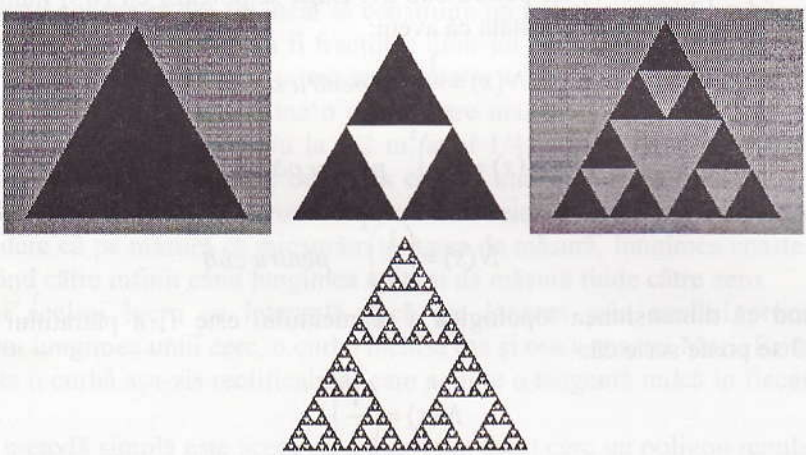


Fig. 5.11. Sita lui Sierpinsky

5.6.3. Dimensiunea de autosimilaritate (fractală)

Dar în afara proprietății de *autosimilaritate*, fractalii mai au o proprietate, de această dată, cel puțin ciudată. Ei sunt, de regulă, entități geometrice cu *dimensiune neîntreagă*. Dar pentru a descrie acest lucru este necesar să facem câteva precizări în ceea ce privește noțiunea de dimensiune.

În matematică, noțiunea de dimensiune este acceptată în mai multe formulări, printre care cele mai uzuale fiind cele de *dimensiune topologică*, *dimensiune Hausdorff*, *dimensiune de autosimilaritate (de capacitate)*, *dimensiune compas (fractală)* etc.

H. Poincare este cel care plecând de la premisa că punctul geometric are dimensiunea zero, face deducția că segmentul de dreaptă are dimensiunea 1 deoarece un punct (ce are dimensiunea 0) despică segmentul în două părți. Și mai departe, pătratul are dimensiunea 2 deoarece o linie (care are dimensiunea 1) îl poate împărți în două părți, iar cubul are dimensiunea 3 deoarece un pătrat (ce are dimensiunea 2) îl poate despica în două părți.

Este aşadar de reţinut că în accepţiunea *dimensiumii topologice*, punctul are dimensiunea 0, dreapta (sau curba) dimensiunea 1, suprafaţa dimensiunea 2, iar corpul volumic (corpul în spaţiu) dimensiunea 3.

Foarte interesantă şi logică este următoarea demonstrare a *dimensiunii de autosimilaritate (de capacitate)* făcută de Kolmogorov în 1958.

Să presupunem un segment de dreaptă, un pătrat şi un cub pe care le reducem la o anumită scară s. În exemplele din fig. 5.12, aceste obiecte au fost reduse la scara s=1/3 pentru a putea obţine noile obiecte prezentate în dreapta figurilor iniţiale şi care sunt *similare* cu acestea. Calculând numărul de obiecte reduse la scară, necesare pentru a umple obiectul iniţial, constatăm că pentru segment sunt necesare 3, pentu pătrat 9, iar pentru cub 27. Dacă se notează cu N(s) numărul de obiecte reduse la scara s se constată că avem:

$$N(s)=\frac{1}{s} \quad \textit{pentru segment}$$

$$N(s)=\left(\frac{1}{s}\right)^2 \quad \textit{pentru pătrat} \tag{5.12}$$

$$N(s)=\left(\frac{1}{s}\right)^3 \quad \textit{pentru cub}$$

Ştiind că dimensiunea topologică a segmentului este 1, a pătratului 2 şi a cubului 3 se poate scrie că:

$$N(s)=\left(\frac{1}{s}\right)^D \tag{5.13}$$

de unde prin logaritmare rezultă:

$$D=\frac{\lg N(s)}{\lg\left(\frac{1}{s}\right)} \tag{5.14}$$

Numărul D poartă denumirea de *dimensiune de autosimilaritate* sau *de capacitate*.

Necesitatea de a defini noţiunea de *dimensiune compas* sau *fractală* a decurs dintr-o întrebare foarte simplă pe care şi-a pus-o Lewis Fry Richardson şi anume, cât de lungă este coasta Marii Britanii?

În primul rând o astfel de încercare de a face o asemenea măsurătoare este foarte dificilă. Se cunoaşte faptul că dacă privim un golf al acestei coaste reprezentat pe o hartă la scara 1:1000000, iar apoi acelaşi golf îl vom privi pe o hartă la scara

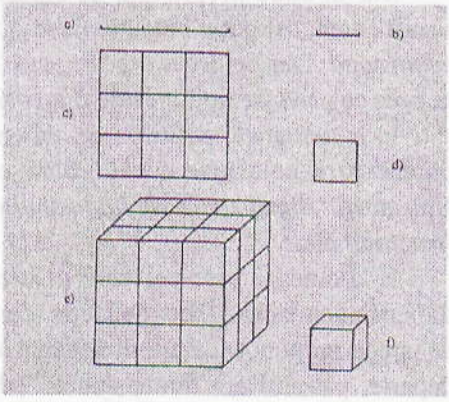


Fig. 5.12. Dimensiunea de autosimilaritate

1:100000 vom remarca nenumarate alte golfulețe și istmuri mai mici ce nu erau vizibile pe prima hartă. Privind apoi aceeași imagine la scara 1:10000 și mai apoi 1:1000 vom remarca de fiecare dată noi golfulețe și mici peninsule ce nu puteau fi văzute la scările anterioare. Evident că practic nu se poate repeta acest experiment la infinit, dar dacă ne imaginăm că putem să facem acest lucru și admitem faptul că de fiecare dată am privi *aceeași* imagine, deci avem proprietatea de *autosimilaritate*, ne putem da seama că avem de-a face cu o structură *fractală*. Acesta este un *fractal natural*, dar nu singurul.

Practic problema măsurării coastei ar putea decurge în modul următor: să folosim de exemplu, un metru confecționat din lemn pe care să-l asezăm succesiv de-a lungul coastei în așa fel încât să construim un poligon, având laturile egale cu 1 m (eventual ultima latură va fi fracțiune dintr-un metru). În acest caz perimetrul acestui poligon ar putea da o primă aproximație a lungimii coastei măsurate. Este de crezut faptul că putem obține o aproximare mai bună dacă reducem lungimea unității de măsură, de exemplu la 1/2 m, apoi 1/4 m etc., formând un șir ce are lungimile laturilor poligonului din ce în ce mai mici și a cărui limită ar fi tocmai lungimea coastei căutate. Lucrurile nu stau însă deloc în acest fel. Vom constata cu surprindere că pe măsură ce micșorăm unitatea de măsură, lungimea coastei crește, ea tinzând către infinit când lungimea unității de măsură tinde către zero.

Nu același lucru se întamplă dacă am încerca prin același procedeu să măsurăm lungimea unui cerc, o curbă închisă (ca și cea a coastei Marii Britanii) dar care este o curbă așa-zis rectificabilă (care admite o tangentă unică în fiecare punct al său).

O metodă simplă este aceea de a înscrie în acest cerc un poligon regulat având latura de o anumită lungime dată, apoi de a înscrie un astfel de poligon cu latura mai mică (dar cu un număr mai mare de laturi) și de a evalua succesiv perimetrele acestor poligoane, extinzând procedeul pentru poligoane cu un număr tot mai mare de laturi având evident lungimea laturii tot mai mică. Se obține un șir al valorilor acestor perimetre ce evident converge către o limită care este tocmai lungimea cercului $L=2\pi R$. De exemplu în cazul unui cerc având raza $R=500m$ aproximarea lungimii acestuia prin procedeul descris mai sus conduce la următorul șir al perimetrelor poligoanelor înscrise:

Număr de laturi	Perimetrul (m)
6	3000
12	3106
24	3133
48	3139
96	3141
192	3141

Este evident că șirul perimetrelor tinde către:

$$L = 2\pi R \cong 2 \cdot 3{,}141 \cdot 500 = 3141m$$

Iată însă cum se prezintă situația dacă am dori ca prin același procedeu să evaluăm lungimea coastei Marii Britanii:

Lungimea laturii (km)	Perimetrul (km)
500	2600
100	3800
54	5770
17	8640

Observăm lesne că șirul perimetrelor nu tinde către o limită finită bine precizată ca în cazul cercului, ci crește necontenit tinzând către infinit!

Iată așadar că procedeul utilizat pentru determinarea lungimii unei curbe rectificabile cum este cercul, nu se poate aplica unei curbe nerectificabile (care admite mai multe tangente în același punct) cum este coasta Marii Britanii.

Efectuând pe hărți reprezentate la diferite scări o succesiune de măsurători, matematicianul Lewis Fry Richardson ajunge la formula empirică:

$$L(\varepsilon) = F \cdot \varepsilon^{1-D} \tag{5.15}$$

în care L(ε) este lungimea perimetrului coastei, atunci când în compas se ia lungimea laturii (distanța) ε, iar F și D sunt două constante caracteristice. Pentru prima constantă F, el propune ca în mod convențional să fie considerată ca fiind lungimea coastei, însă pentru cea de a doua, D, el nu a găsit o semnificație fizică. După mulți ani, Benoit Mandelbrot validează formula lui Richardson, și dă o semnificație acestei constante D, numind-o *dimensiune compas* sau *dimensiune fractală*. Se poate demonstra că această dimensiune compas sau fractală coincide cu dimensiunea de autosimilaritate.

5.6.4. Calculul dimensiunii de autosimilaritate (fractală) în cazul unor fractali clasici

În continuare vom demonstra că dimensiunea de autosimilaritate a fractalilor este uneori un număr nenatural, evident diferit de dimensiunea topologică aparentă. Vom face acest lucru pentru câtiva fractali clasici.

1. Mulțimea lui Cantor (fig. 5.9)

Vom aplica pentru calculul dimensiunii de autosimilaritate, formula (5.14). Observăm că la scara s=1/1 există N(s)=1 element, la scara s=1/3 avem N(s)=2 elemente, la scara $1/9=1/3^2$ sunt $N(s)=4=2^2$ elemente.

Prin inducție se poate verifica lesne că la scara $1/3^k$ există $N(s)=2^k$ elemente. Introducând aceste rezultate în formula (5.14) obținem:

$$D=\frac{\lg N(s)}{\lg\left(\frac{1}{s}\right)}=\frac{\lg 2^k}{\lg 3^k}=\frac{k\lg 2}{k\lg 3}=\frac{\lg 2}{\lg 3}\cong 0{,}6309$$

Mulțimea Cantor fiind în final o mulțime de puncte are dimensiunea topologică $D_T=0$.

2. Curba lui Koch (fig. 5.10)

Observând că la scara s=1/1 există N(s)=1 element, la scara s=1/3 sunt N(s)=4 elemente, la scara $s=1/9=1/3^2$ sunt $16=4^2$ elemente și mai departe prin inducție, la scara $1/3^k$ există $N=4^k$ elemente. Introducând în formula (5.14) obținem:

$$D=\frac{\lg N(s)}{\lg\left(\frac{1}{s}\right)}=\frac{\lg 4^k}{\lg 3^k}=\frac{k\lg 4}{k\lg 3}=\frac{\lg 4}{\lg 3}\cong 1{,}2618$$

Dimensiunea topologică a curbei lui Koch este evident $D_T=1$ (dimensiunea unei curbe).

3. Sita lui Sierpinski (fig. 5.11)

Evident că la scara s=1/1 există N(s)=1 element și anume triunghiul echilateral inițial. La scara s=1/2 sunt N(s)=3 elemente (cele 3 triunghiuri echilaterale înnegrite). La scara $s=1/4=1/2^2$ avem $N(s)=9=3^2$ elemente (triunghiuri echilaterale înnegrite). Prin inducție se demonstrează că la scara $s=1/2^k$ există $N(s)=3^k$ elemente. Introducând in formula (5.14) rezultă:

$$D=\frac{\lg N(s)}{\lg\left(\frac{1}{s}\right)}=\frac{\lg 3^k}{\lg 2^k}=\frac{K\lg 3}{K\lg 2}=\frac{\lg 3}{\lg 2}\cong 1{,}585$$

4. Covorul lui Sierpinski (fig. 5.12)

Fie un pătrat cu latura egală cu unitatea. Vom împărți fiecare latură în trei părți egale. Vom obține așadar 9 pătrate cu latura 1/3. Eliminând pătratul din mijloc obținem 8 pătrate ale căror laturi le vom împărți din nou în câte 3 părți egale. Se formează 72 de pătrate cu latura 1/9. Eliminând pătratul din mijloc de latură 1/9 din fiecare cele 8 pătrate, rămân 64 de pătrate cu latura 1/9. Repetând operația de un număr foarte mare de ori se obține covorul lui Sierpinski.

Este evident că la scara s=1/1 avem un singur pătrat N(s)=1; la scara s=1/3 există N(s)=8 pătrate, la scara $s=1/9=1/3^2$ sunt $N(s)=64=8^2$ pătrate.

Prin inducție se remarcă faptul că la scara $S=1/3^k$ există un număr $N=8^k$ pătrate. Dimensiunea de autosimilaritate va fi:

$$D=\frac{\lg N(s)}{\lg\left(\frac{1}{s}\right)}=\frac{\lg 8^k}{\lg 3^k}=\frac{k\lg 8}{k\lg 3}=\frac{\lg 8}{\lg 3}\cong 1{,}8928$$

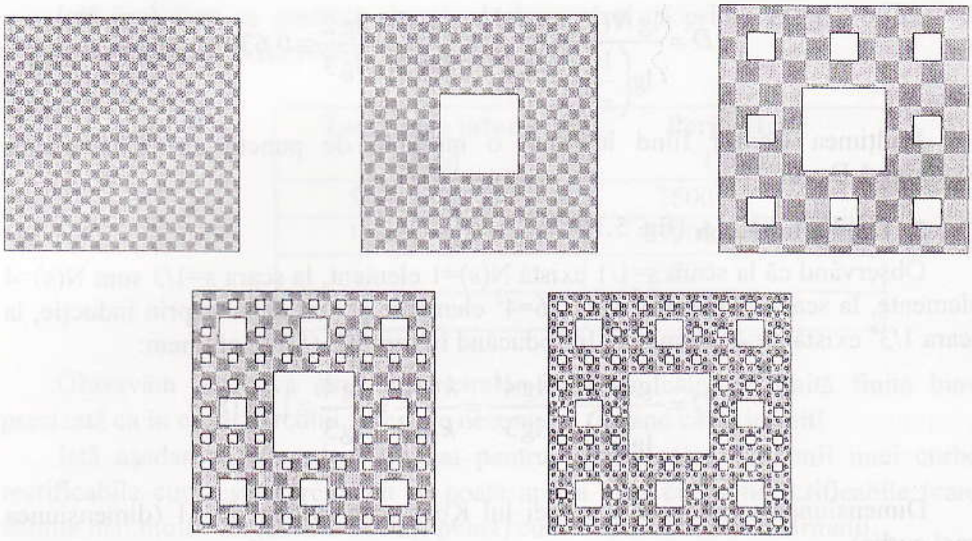


Fig. 5.13. Covorul lui Sierpinsky

5. Buretele lui Menger (fig. 5.14)

Vom presupune un cub cu muchia egală cu unitatea. Împărțim fiecare muchie a cubului în trei părți egale. Vom obține 27 de cuburi de muchie 1/3. Să eliminăm acum cuburile de pe rândurile centrale. Vor rămâne 20 de cuburi de muchie 1/3. Continuăm procedeul cu fiecare din aceste 20 de cuburi. Se vor obține 400 de cuburi de muchie 1/9. Continuând procedeul de un număr foarte mare de ori se obține buretele lui Menger.

La scara s=1/1 există un singur cub N(s)=1. La scara s=1/3 sunt N(s)=20 de cuburi. La scara s=1/9 sunt N(s)=400=20^2 cuburi.

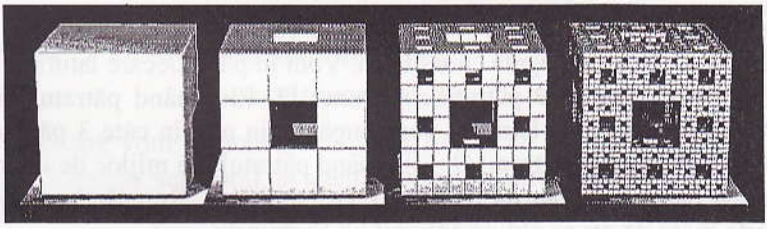


Fig.5.14. Buretele lui Menger

Aplicând inducția rezultă că la scara S=$1/3^k$ vom avea N=20^k cuburi. Calculând dimensiunea de autosimilaritate obținem:

$$D=\frac{\lg N(s)}{\lg\left(\frac{1}{s}\right)}=\frac{\lg 20^k}{\lg 3^k}=\frac{k\lg 20}{k\lg 3}=\frac{\lg 20}{\lg 3}\cong 2{,}7268$$

Din exemplele date până acum se observă că dimensiunea de autosimilaritate sau fractală este un număr neîntreg. Fractalii au în general dimensiuni neîntregi însă acest lucru nu este obligatoriu. În sprijinul acestei afirmații stă *Curba lui Peano* și *Curba lui Hilbert* ce au dimensiunea întreagă egală cu 2.

Am menționat proprietatea de autosimilaritate a fractalilor care este o noțiune matematică teoretică, proprie *fractalilor matematici*. În realitate, în lumea înconjuratoare autosimilaritatea nu poate merge la infinit. Desprindem astfel ideea ca *fractalul natural* se deosebește de *fractalul matematic*, acesta din urmă fiind doar un model pentru cel dintâi.

În final, se poate oferi (în urma observațiilor făcute după analiza dimensiunilor topologică și fractală) o definiție mai riguroasă a noțiunii de fractal. **Fractalii sunt entități geometrice ce au dimensiunea fractală D mai mare decât dimensiunea topologica D_T.**

5.6.5. Aplicații ale geometriei fractale

Trebuie menționat faptul că fractalii ce au fost descriși în acest capitol precum și alții dealtfel, fractali ce au o regulă precisă de generare după cum s-a văzut, pot fi generați și analitic (prin ecuații matematice ce descriu așa-numitele *transformări afine* în plan). Această metodă de generare analitică a fractalilor permite realizarea destul de simplă de programe de calcul ce fac posibilă generarea pe calculator a unor forme foarte complicate de fractali naturali.

În figura 5.15 este prezentata „feriga lui Barnsley" realizată pe calculator doar cu ajutorul *transformărilor afine*

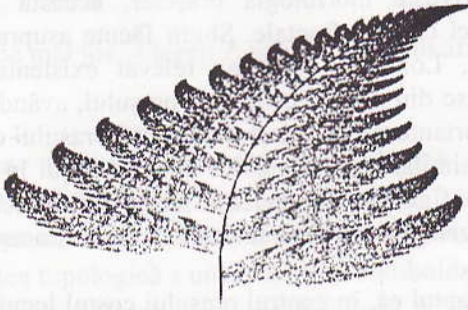


Fig. 5.15. Feriga lui Barnsley

În figura 5.16 prezentăm *mulțimea Mandelbrot* realizată pe calculator prin programarea unor *relații de recurență*. Această mulțime este probabil cel mai cunoscut fractal. Matematicienii afirmă că acest fractal este și cel mai frumos dar și cel mai complex obiect al matematicii moderne. De la experimentul făcut de Mandelbrot în 1979 când a generat pe calculator fractalul ce-i poartă numele și până astăzi, mulți alți oameni de știință au repetat generarea fractalului și au studiat proprietățile acestuia.

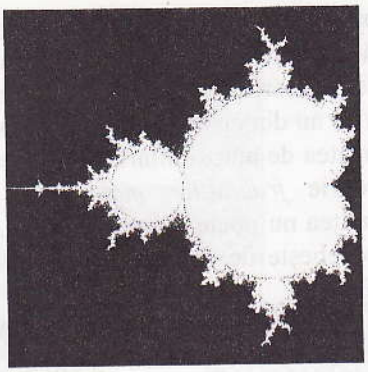


Fig. 5.16. Mulțimea Mandelbrot

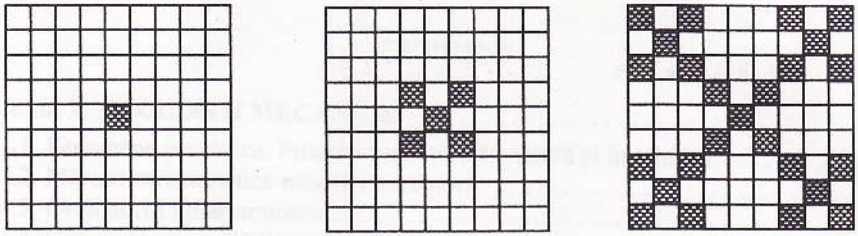
Dar aplicabilitatea geometriei fractale nu se rezumă doar la fenomenele statice, ci ea şi-a găsit întrebuinţarea şi în studiul fenomenelor dinamice, în evoluţie cum ar fi fenomenele de creştere în biologie sau de dezvoltare a populaţiilor urbane – aşa numita morfologie a oraşelor.

Iată spre exemplu, dezvoltarea unei plante în formă de buruiană sau a unui tufiş pot fi simulate prin generarea unui fractal prin aşa-numitele legi de producţie.

În medicină, s-au dezvoltat studii serioase în ceea ce priveşte generarea unor fractali ce modelează *structura pulmonară*, *reţeaua neuronală a creierului*, *reţeaua de vascularizare a organismului* precum şi alte organe a căror structură se pretează la o modelare fractală.

În ceea ce priveşte morfologia oraşelor, aceasta prezintă foarte multe caracteristici ale unei creşteri fractale. Studii făcute asupra dezvoltării unor mari metropole ca Paris, Londra, Tokyo au relevat existenta unor „tentacule" de dezvoltare ce izvorăsc din miezul central al oraşului, având o forma *dendritică* ce urmează liniile importante de transport din centrul oraşului către suburbii. Se poate observa deci o autosimilaritate a modului în care oraşul în sine, districtele sale şi vecinătăţile sunt configurate cu aceleaşi forme ale structurii comerciale şi de transport. Autosimilaritatea este însă limitată în centrul oraşului unde geometria sa devine euclidiană.

Este cunoscut faptul că, în centrul oraşului costul locuinţelor este mai ridicat, competiţia pentru spaţiu fiind aici acerbă. Costul transportului din centru către periferie frânează expansiunea rapidă a metropolei. Apare aşadar o competiţie între accesibilitatea maximă din centrul oraşului şi nevoia de spaţiu locativ cu cost redus ce poate fi găsit la distanţe din ce în ce mai mari de centru. Analizând toate aceste aspecte între anii 1981–1983, Witten şi Sander au propus un model *stochastic* elementar ce reproduce destul de fidel dezvoltarea urbană. Ei au generat un fractal bazat pe o asa-numită *latice* bidimensională pătrată în care unitatea centrală se replică ocupând oarecum aleatoriu spaţii libere, generând structuri precum cele prezentate în figura 5.17.



a b c

Fig. 5.17. Modelul *latice* Witten-Sander

Nu în ultimul rând noua teorie a fractalilor şi-a găsit aplicabilitatea şi în artă, existând în momentul de faţă o explozie a aşa-numiţilor „fractali artistici" – adevărate capodopere grafice încântătoare pe de o parte şi neliniştitoare pe de alta, numărul expoziţiilor de grafică şi sculptură fractală luând o amploare neaşteptată.

În fig. 5.18 este prezentată o astfel de grafică.

Prin urmare, aplicabilitatea geometriei fractale este în continuă dezvoltare, noi şi noi domenii găsindu-şi modelul de studiu în acest recent capitol al iscodirilor pe care omul, de la apariţia sa pe pământ nu încetează a le face.

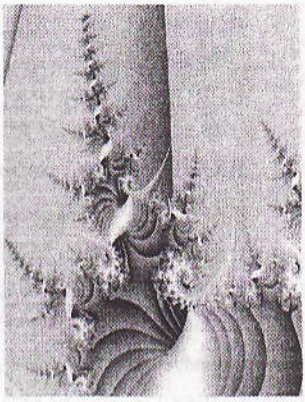


Fig. 5.18. Fractal artistic

Test

Citiţi afirmaţiile de mai jos. Alegeţi A sau F după cum afirmaţia este adevărată sau falsă.

1. A F Proprietatea de autosimilaritate se regăseşte la toate "obiectele" geometrice euclidiene.
2. A F Dimensiunea topologică a unei suprafeţe triunghiulare este 2.
3. A F Dimensiunea topologică a unei suprafeţe romboidale este 3.
4. A F Dimensiunea topologică a unei piramide este 1.
5. A F Dimensiunea topologică a unui cub este 2.
6. A F Dimensiunea topologică a unei sfere este 3.
7. A F Dimensiunea de autosimilaritate (fractală) este întotdeauna un număr natural.
8. A F Dimensiunea de autosimilaritate (fractală) nu poate fi niciodată naturală.
9. A F Dimensiunea fractală este mai mică decât dimensiunea topologică.
10. A F În natură autosimilaritatea este infinită.

BIBLIOGRAFIE

1. AILINCĂI, M., RĂDULESCU, I., *Probleme – întrebări de fizică,* Editura Didactică şi Pedagogică, 1972.
2. BERGE, P., POMEAU, Y., VIDAL, CH., *L'ordre dans le chaos,* Hermann, Editures des sciences et des arts, Paris, 1984.
3. BRAILE, L., W., *Seismic waves and the slinky,* The IRIS Consortium, March, 2006.
4. BRĂTESCU, G., *Optica,* Editura Didactică şi Pedagogică, 1982.
5. BRENNEKE, R., SCHUSTER, G., *Fizică,* Editura Didactică şi Pedagogică, 1973.
6. BUNGET, I., s.a., *Compendiu de fizică pentru admitere în învăţământul superior,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1988.
7. CIŞMAN, A., *Fizică generală,* Editura Tehnică, 1959.
8. ENESCU, N., MAGHETI, I., SÂRBU, M.A., *Acustica Tehnică,* Editura ICPE, Bucureşti, 1998.
9. FRIŞ, S., TIMOREVA, A., *Fizică generală,* vol. II, Editura Tehnică, 1955.
10. GARABET, M., NEACŞU, I., *Lecţii experimentale în laboratorul de fizică,* Niculescu, 2004.
11. HALLIDAY, D., RESNICK, R., *Fizică,* Editura Didactică şi Pedagogică, 1975.
12. HRISTEV, A., *Mecanică şi acustică* Editura Didactică şi Pedagogică, 1982.
13. INŢA, I., DUMITRU, S., *Complemente de fizică,* Ed. Tehnică, 1982.
14. MANDELBROT, B., *Les objects fractals, hasard et dimension,* Flammarion, Paris, 1989.
15. POPESCU, I.I., TOADER, E., *Optica,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1989.
16. SEARS, F., ZEMANSKY, M., YOUNG, H., *Fizică,* Editura Didactică şi Pedagogică, 1983.
17. URI HABER-SCHAIM ş.a., *Fizica PSSC – Testul elevului,* Editura Didactică şi Pedagogică, 1975.
18. VOINEA, R., STROE, I., *Sisteme dinamice,* Editura Academiei Române, Bucureşti, 2000.
19. *Dicţionar de fizică,* Editura Enciclopedică Română, 1972.
20. *Mecanică fizică şi acustică. Lucrări practice,* Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Fizică, 1985.

CUPRINS

Capitolul 1. **OSCILAȚII MECANICE** 3

1.1. Fenomene periodice. Procese oscilatorii în natură și în tehnică 3
1.2. Mărimi caracteristice mișcării oscilatorii 4
1.3. Oscilatorul liniar armonic 5
1.4. Compunerea oscilațiilor 25
1.5. Mișcarea oscilatorie armonică amortizată 32
1.6. Oscilatori mecanici cuplați 36
1.7. Consecințe și aplicații 39

Capitolul 2. **UNDE MECANICE** 41

2.1. Propagarea unei perturbații într-un mediu elastic. Transferul de energie ... 41
Probleme rezolvate 45
Test 47
Probleme propuse 48
2.2. Ecuația undei plane 49
Probleme rezolvate 52
Probleme propuse 55
2.3. Reflexia și refracția undelor mecanice 56
2.4. Difracția undelor 60
2.5. Interferența undelor mecanice 62
2.6. Acustica 76
2.7. Ultrasunete și infrasunete. Aplicații în medicină, industrie, tehnică militară 91
2.8. Unde seismice 97

Capitolul 3. **OSCILAȚII ȘI UNDE ELECTROMAGNETICE** 104

3.1. Circuite de curent alternativ 104
3.2. Oscilații electromagnetice 146
3.3. Câmpul electromagnetic 152
3.4. Clasificarea undelor electromagnetice 159
3.5. Aplicații practice ale undelor electromagnetice 163

Capitolul 4. **OPTICA ONDULATORIE** 167

Introducere 167
4.1. Dispersia luminii 169
4.2. Interferența luminii 180
4.3. Difracția luminii 202
4.4. Polarizarea luminii 215

Capitolul 5. **ELEMENTE DE TEORIA HAOSULUI** 224

5.1. Introducere 224
5.2. Determinism și predictibilitate. Condiții. Modele. 226
5.3. Determinism și impredictibilitate. Comportament haotic. Condiții 228
5.4. Descrierea comportamentului haotic. Spațiul fazelor. Atractori clasici și stranii 230
5.5. Câteva informații actuale cu privire la comportamente haotice ale unor sisteme și atractori stranii clasici 235
5.6. Elemente de geometrie fractală 238

BIBLIOGRAFIE 250

ISBN 978-973-30-1883-4